

# المتميز

في

الرياضيات التطبيقية  
الأسنانكا

الجزء النظري

و

حلول التمارين  
الوحدة الأولى

|| ق ||

( سيم ، صم )

مجو

أحمد

الصف الثالث الثانوي  
القسم العلمي  
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري

## الوحدة الأولى .... الاحتكاك

## ١ - ١ اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

تمهيد :

نعلم أن هناك العديد من أنواع القوى مثل : قوة رد الفعل ، و قوة الوزن ( أو الثقاقل ) ، و قوى الشد ، و قوى الضغط ، ....  
هناك أيضاً قوى تنشأ بين الأجسام ( الساكنة أو المتحركة ) تسمى قوى الاحتكاك التى بدونها تكون الحياة مستحيلة فلولا وجود قوى الاحتكاك لما استطاع الانسان أن يحفظ توازنه ، فأنت عندما تسير تحاول أن تدفع الأرض إلى الوراء بقوة ، و هى بالمقابل تقوم برد فعل على قدميك فتدفعك للأمام و بذلك تستطيع الانتقال من موضع لآخر ، بينما من الصعب أن تسير على الجليد لأنه سطح أملس لا يسبب احتكاكاً ، و للاحتكاك فوائد عديدة أخرى

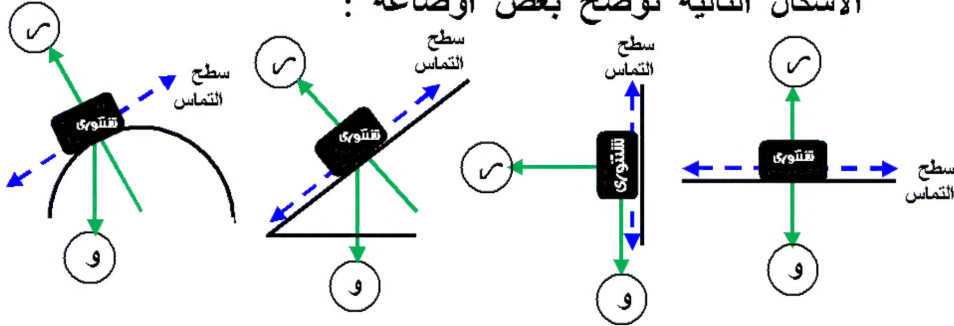
رد الفعل :

رد الفعل هو قوة تنشأ عند تلامس جسمين فإذا وضع جسم على نضد فإن :  
النضد يؤثر على الجسم بقوة تسمى رد فعل النضد على الجسم (  $r$  )  
كما يؤثر الجسم على النضد بقوة مضادة تسمى ضغط الجسم على النضد (  $ض$  ) ، و  
القوتان متساويتان فى المقدار (  $ض = r$  ) و متضادتان فى الاتجاه

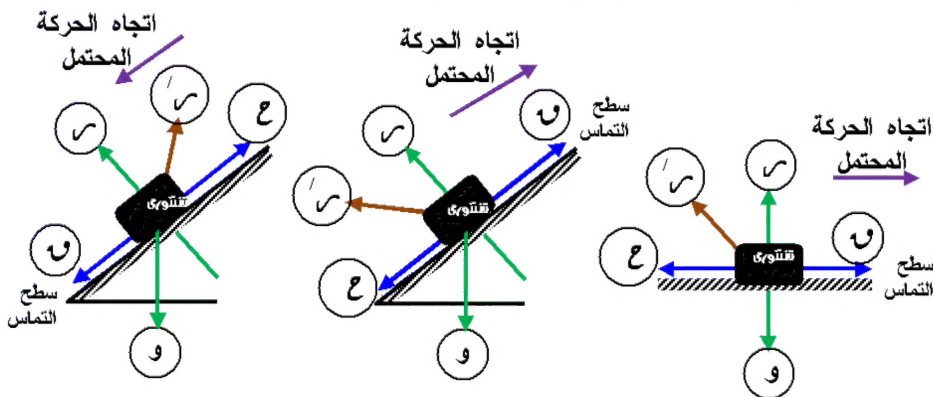
ملاحظات :

(١) يتوقف رد الفعل على طبيعة الجسمين المتلامسين ، كما يتوقف على القوى المؤثرة الأخرى على الجسم

(٢) فى حالة السطوح الملساء يكون رد الفعل عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين و يسمى رد الفعل العمودى الأشكال التالية توضح بعض أوضاعه :



(٣) فى حالة السطوح الخشنة يكون رد الفعل مائلاً على سطح التماس و يسمى رد الفعل المحصل و يرمز له بالرمز (  $r'$  ) بحيث يمكن تحليلها إلى مركبتين متعامدتين :  
الأولى عمودية على سطح التماس هى قوة رد الفعل (  $r$  )  
الثانية موازية لسطح التماس تسمى قوة الاحتكاك السكونى و يرمز له بالرمز (  $ع$  )  
الأشكال التالية توضح بعض أوضاعه :

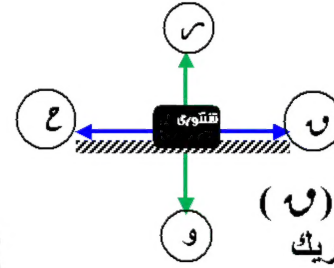




## قوة الاحتكاك السكونى :

هى قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن ( الجسم على وشك الحركة )

أو عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين ( يكونا على وشك الحركة ) فإذا وضع جسم مقدار وزنه ( و ) على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه قوة أفقية مقدارها ( و ) فإنه تظهر قوة خفية تقاوم حركته تسمى قوة الاحتكاك السكونى ( ع )



تعمل فى اتجاه مضاد لاتجاه القوة التى مقدارها ( و ) فإذا لم تكن القوة التى مقدارها ( و ) كافية لتحريك الجسم فإن الجسم يكون متزاناً تحت تأثير :

(١) قوة الوزن و مقدارها ( و ) ، و قوة رد الفعل العمودى و

و مقدارها ( ر ) حيث :  $و = ر$

(٢) القوة الأفقية و مقدارها ( و ) ، و قوة الاحتكاك السكونى و

و مقدارها ( ع ) حيث :  $ع = و$

## خواص الاحتكاك السكونى :

[١] تعمل قوة الاحتكاك السكونى ( ع ) على معاكسة الانزلاق فتكون فى

اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى الانزلاق فيه

[٢] تكون قوة الاحتكاك السكونى ( ع ) مساوية فقط للقوة المماسية التى

تعمل على تحريك الجسم و لا يمكن أن تزيد عن هذه القوة

[٣] تتزايد قوة الاحتكاك السكونى ( ع ) كلما تزايدت القوة المماسية التى

تعمل على إحداث الحركة فتكون دائماً مساوية لها فى المقدار مادام الجسم متزاناً

[٤] تتزايد قوة الاحتكاك السكونى ( ع ) إلى حد لا تتعداه و عند ذلك

يكون الجسم على وشك الانزلاق و يسمى الاحتكاك فى هذه الحالة

بالاحتكاك السكونى النهائى و يرمز له بالرمز ( ع ر ) أى أن :

## قوة الاحتكاك السكونى النهائى :

هى قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار الاحتكاك إلى قيمته النهائية

( العظمى ) و التى يكون عندها الجسم على وشك الحركة

[٥] النسبة بين الاحتكاك السكونى النهائى ورد الفعل العمودى ثابتة و

تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين و ليس على شكليهما أو

كتلتهما و تسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكونى و يرمز له

بالرمز ( ك ر ) أى أن :

## معامل السكونى النهائى :

هو النسبة بين قوة الاحتكاك السكونى النهائى ( ع ر ) و رد الفعل

العمودى ( ر ) وبالتالى يكون :  $ك ر = ع ر$

و منها :  $ع ر = ك ر ر$

## ملاحظات :

(١) معاملات الاحتكاك السكونى فى أغلب الأحيان يكون

فيها :  $ك ر > ٠$  " الصحيح "

إلا أنه فى بعض الحالات الخاصة قد تزيد عن الواحد الصحيح

(٢) المتساوية :  $ع ر = ك ر ر$  تتحقق فقط عند الاحتكاك السكونى

النهائى أى عندما يكون الجسم على وشك الحركة و هى أقصى

قيمة للاحتكاك السكونى ( ع ) أى :  $ع ر \geq ٠$  و  $ك ر \geq ٠$

(٣) إذا كان الجسم ساكناً فإن :  $ع ر \geq ك ر ر$

(٤) تنعدم قوى الاحتكاك فى السطوح الملساء تماماً

و يكون معامل الاحتكاك = صفراً

أحمد الشنتوي

## قوة الاحتكاك الحركى :

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركى ( $E_n$ ) يكون اتجاهه عكس اتجاه حركته و تعطى قيمتها بالعلاقة :

$$E_n = \mu_n \cdot R \quad \text{حيث :}$$

$\mu_n$  هو معامل الاحتكاك الحركى ،  $R$  رد الفعل العمودى

أى أن : قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة رد الفعل العمودى

ومن ذلك يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركى بأنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركى و قوة رد الفعل العمودى أى أن :  $\mu_n = \frac{E_n}{R}$

## ملاحظة :

قوة الاحتكاك النهائى للأجسام الساكنة أكبر من قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة أى أن :  $E_s < E_n$  و بالتالى يكون :  $\mu_s < \mu_n$

## رد الفعل المحصل :

فى حالة السطوح الخشنة فإن رد الفعل المحصل يكون مائلاً على سطح التماس حيث أنه يعتبر محصلة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى و يسمى أيضاً برد الفعل الكلى

أى أن : الفعل المحصل ( $R'$ ) هو محصلة رد الفعل ( $R$ ) و قوة الاحتكاك السكونى ( $E_s$ ) و بالتالى يكون :

$$R' = \sqrt{R^2 + E_s^2} \quad \text{أى : } R' = \sqrt{R^2 + E_s^2}$$

و فى حالة الاحتكاك السكونى النهائى يكون :  $R' = \sqrt{R^2 + E_s^2}$

$$\begin{aligned} \therefore E_s &= \mu_s R \\ \therefore R' &= \sqrt{R^2 + \mu_s^2 R^2} \end{aligned}$$

## زاوية الاحتكاك :

إذا كان :  $\alpha$  هو قياس الزاوية

المحصورة بين رد الفعل العمودى

و رد الفعل المحصل فإنه يلاحظ

أن قيمة  $\alpha$  تتزايد كلما تزايد مقدار

الاحتكاك ( بفرض ثبوت مقدار قوة

رد الفعل العمودى ) و أن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى عندما

يصبح الاحتكاك نهائياً و تسمى الزاوية فى هذه الحالة :

( زاوية الاحتكاك ) أى أن :

## زاوية الاحتكاك :

هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل و قوة رد الفعل

عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى

$$\text{و يكون : } \tan \alpha = \mu_s \quad , \quad \therefore \mu_s = \frac{E_s}{R}$$

$\therefore$  :  $\tan \alpha = \mu_s$  أى أن :

ظل زاوية الاحتكاك = معامل الاحتكاك السكونى

## ملاحظة :

$$\therefore R' = \sqrt{R^2 + E_s^2} \quad , \quad \tan \alpha = \mu_s \quad ,$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{R'^2}{R^2} \quad \therefore R' = \frac{R}{\cos \alpha}$$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٧

قارن بين قياس زاويتي الاحتكاك السكونى و الاحتكاك الحركى

## الحل

$\therefore \mu_s < \mu_n$   $\therefore$  ظل زاوية الاحتكاك السكونى < ظل زاوية الاحتكاك النهائى

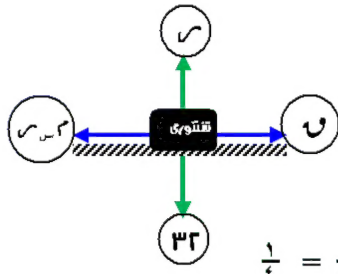
$\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك السكونى < قياس زاوية الاحتكاك النهائى

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٨

وضعت كتلة وزنها ٣٢ نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثرت عليها قوة أفقية ١٠ حتى أصبحت الكتلة على وشك الحركة (١) إذا كانت :  $١٠ = ٨$  نيوتن أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة و المستوى

(ب) إذا كان :  $٢٠ = ٨$  ، أوجد ١٠

الحل



∴ الكتلة على وشك الحركة

$$\therefore ٣٢ = ١٠ , ٢٠ = ٨$$

$$(١) \therefore ٨ = ١٠ \text{ نيوتن} \therefore ٨ = ٣٢ \mu \therefore \mu = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤}$$

$$\therefore \mu = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤} \text{ ومنها : } ٨ = ٣٢ \times \mu$$

$$(ب) \therefore ٢٠ = ٨ \therefore ٢٠ = ٣٢ \times \mu \therefore \mu = \frac{٢٠}{٣٢} = \frac{٥}{٨}$$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٩

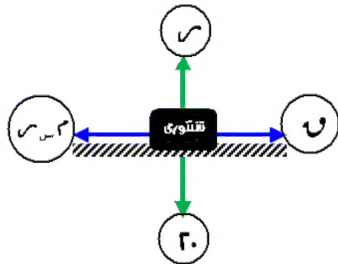
وضع جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى  $\frac{١}{٤}$  أوجد :

(١) مقدار القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة

(ب) القوة التى تميل على المستوى بزاوية قياسها  $٣٠^\circ$  و تجعل

الجسم على وشك الحركة

الحل



(١) ∴ الجسم على وشك الحركة

$$\therefore ٢٠ = ٢٠$$

$$, ٢٠ = ٢٠ \times \frac{١}{٤} = ٥ \text{ نيوتن}$$

## اتزان جسم على مستوى أفقى خشن :

إذا وضع جسم وزنه ( و ) على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه قوة مقدارها ( و ) تميل على الأفقى بزاوية قياسها (  $\theta$  ) فإن : الجسم فى وضع التوازن يكون متزاناً تحت تأثير القوى :

(١) قوة الوزن ( و ) رأسياً لأسفل

و مقدارها ( و )

(٢) قوة رد الفعل المحصل ( و )

و مقدارها ( و )

(٣) القوة ( و ) و مقدارها ( و )

و الشكل المقابل يوضح ذلك

و بتحليل القوة ( و ) إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى و الاتجاه

العمودى عليه فإن مقدارها يكون : و حتا  $\theta$  ، و حا  $\theta$

، و بتحليل ( و ) إلى مركبتين

متعامدتين هما رد الفعل العمودى

( و ) و مقدارها ( و )

، و قوة الاحتكاك ( و )

و مقدارها ( و )

و الشكل المقابل يوضح ذلك

فتكون معادلتا اتزان الجسم هما :

$$ع = و حا \theta , و = و + و حا \theta$$



$$ع \geq ع \geq ع \therefore 3\sqrt{2} \geq 1 \times ع \therefore$$

$$ع \leq ع \therefore \frac{1}{3\sqrt{2}} \leq طال \therefore \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

∴ قياس زاوية الاحتكاك يجب ألا تقل عن ٣٠°

عندما : ط ( ل ) = ٤٥° ، بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير

نفرض أن : القوة الأخرى = ل ، محصلتهما = ط

$$ع = ١٦ + ل + ٢ \times ٤ \times ٢ \times ل \times حتا ١٢٠^\circ$$

ليكون الجسم على وشك الحركة يجب أن يكون : ط = ع

$$ل : ط = ع = (ع \times ع) = (ط \times ٤٥^\circ) = (١ \times ٦) = ٣٦$$

$$ع = ١٦ + ل + ٢ \times ٤ \times ٢ \times ل \times حتا ١٢٠^\circ = ٣٦$$

$$ع = ٣٦ - ل - ٤ = ٢٠$$

$$ع = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2} = \frac{(20 - 1) \times 4 - 16 \pm 1}{1 \times 2} = ع$$

$$ع = ٢ + 3\sqrt{2} \text{ و يرفض الحل الآخر}$$

### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١

وضع جسم وزنه (و) ث كجم على مستوى أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم و المستوى (ل) ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (ل٢) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة

أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و طال

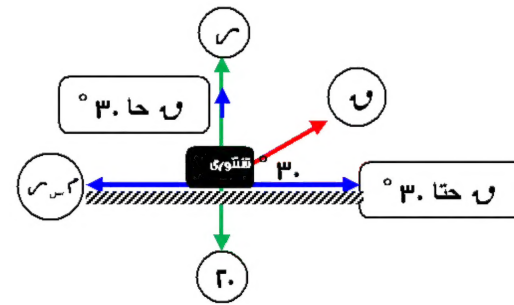
الحل

∴ ع' هي محصلة القوتين ع ، ع

∴ الجسم متزن تحت تأثير القوى التى مقاديرها :

و ، ع ، ع' و بتطبيق قاعدة لامى :

$$\frac{و}{[ (ل - ل٢) - ٩٠^\circ ] \text{ حتا}} = \frac{ع}{(ل - ١٨٠^\circ) \text{ حتا}}$$



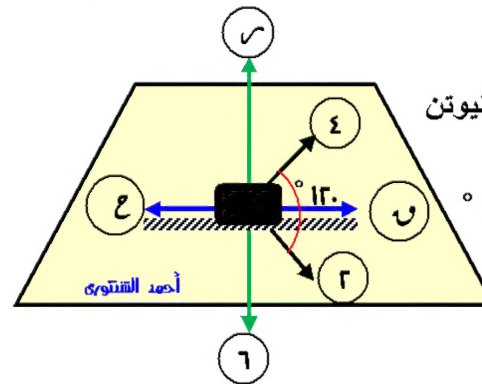
$$ع = \frac{و}{\frac{1}{2} + 3\sqrt{2}} = ٢٠ \therefore ٢٠ = \frac{1}{2} \times و + و \times 3\sqrt{2} \therefore ٠,٠ = ٠,٠ \text{ نيوتن}$$

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٩

وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثرت عليه فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل ساكناً ، أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم و المستوى يجب ألا تقل عن ٣٠°

و إذا كانت ل = ٤٥° و بقى اتجاه القوتين ثابتاً كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير ، فعين مقدار القوة الأخرى لكى يكون الجسم على وشك الحركة

الحل



القوى المستوية و المتزنة ( و ، ع ، ع' ) نيوتن

تكون : ع' محصلة ٢ ، ٤ حيث :

$$ع = ١٦ + ٤ + ٢ \times ٤ \times ٢ \times حتا ١٢٠^\circ$$

$$ع = ١٢ \therefore ١٢ = ٣\sqrt{2} \times و \therefore و = ١٢$$

∴ الجسم ساكن

$$\therefore ع = و = ٣\sqrt{2} ، ع' = ٦$$

## حل تمارين ( ١ - ١ ) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

أولاً : أكمل ما يلى :

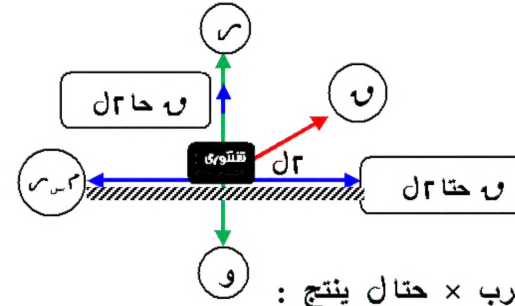
- (١) تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين بقوة ....
- (٢) تنعدم قوى الاحتكاك و يكون معامل الاحتكاك مساوياً للصفر فى السطوح ....
- (٣) عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون ....
- (٤) قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة ....
- (٥) محصلة قوة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى تسمى ....
- (٦) قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى فى قوة ....
- (٧) إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين كتلة مقدارها ٤ كجم و سطح الأرض يساوى ٠,٤٥. فإن مقدار القوة الأفقية التى تؤثر على الكتلة و تجعلها على وشك الحركة تساوى ....
- (٨) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن و كان مقدار قوة الاحتكاك السكونى ٤ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

الحل

- (١) تسمى القوة التى تظهر عند انزلاق سطحين متلامسين خشنيين بقوة الاحتكاك
- (٢) تنعدم قوى الاحتكاك و يكون معامل الاحتكاك مساوياً للصفر فى السطوح الملساء
- (٣) عندما تصل قوة الاحتكاك السكونى إلى قيمتها العظمى فإن الجسم يكون على وشك

$$\therefore \frac{u}{\text{حال}} = \frac{v}{\text{حال}} \therefore \frac{u}{\text{حال}} = \frac{v}{\text{حال}} \therefore \frac{u}{\text{حال}} = \frac{v}{\text{حال}}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$



حل آخر

∴ الجسم على وشك الحركة

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

$$\therefore u = v \times \frac{\text{حال}}{\text{حال}} = v \times \text{و طال}$$

## الحركة

(٤) قوة الاحتكاك الحركى تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك الحركى فى قوة

## رد الفعل العمودى

(٥) محصلة قوة رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك السكونى تسمى **رد الفعل المحصل**

(٦) قوة الاحتكاك السكونى أقل من أو تساوى حاصل ضرب معامل الاحتكاك السكونى

## فى قوة رد الفعل العمودى

(٧)  $\therefore$  الكتلة على وشك الحركة

$$\therefore \text{مس} = ٤٠$$

$$\text{مس} = ٧ = ٤٠ \times ٠,٤٥$$

$$\therefore \text{مس} = ١٨ \text{ ث كجم}$$

(٨)  $\therefore$  الجسم على وشك الحركة  $\therefore \text{مس} = ٦$

$$\therefore \text{مس} = ٤ = ٦ \text{ و منها : } \text{مس} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

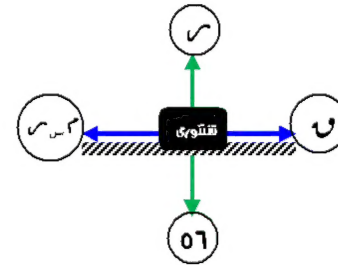
ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) يدفع فتى حجراً وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على

رصيف فكان الحجر على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك بين الحجر

و الرصيف

## الحل



$\therefore$  الجسم على وشك الحركة  $\therefore \text{مس} = ٥٦$

$$\text{مس} = ٧ = ٤٢ \times \text{مس}$$

$$\therefore \text{مس} = \frac{٤٢}{٥٦} = \frac{٣}{٤}$$

(١٠) جسم وزنه ٢٤٠ ث كجم وضع على مستوى أفقى خشن ويراد شده

بحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان معامل الاحتكاك

السكونى يساوى  $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$  فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم

## على وشك الحركة

## الحل

$\therefore$  الجسم على وشك الحركة

$$\therefore \text{مس} + \text{ش} \text{ حا } ٣٠^\circ = ٢٤٠$$

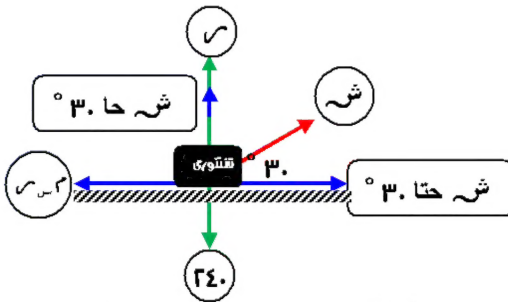
$$\therefore \text{مس} = ٢٤٠ - \frac{١}{٢} \text{ ش}$$

$$\text{ش} \text{ حتا } ٣٠^\circ = \text{مس}$$

$$\therefore \text{ش} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \times (٢٤٠ - \frac{١}{٢} \text{ ش})$$

$$\therefore \frac{١}{٢} \text{ ش} = ٨٠ \quad \therefore \frac{٢}{٣} \text{ ش} = ٨٠$$

و منها :  $\text{ش} = ١٢٠ \text{ ث كجم}$



ومنها ينتج :

(١١) وضع جسم وزنه ٣٩ ث كجم على مستوى أفقى خشن ، أثرت عليه

قوتان مقدارهما ٧ ، ٨ ث كجم و تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠°

فأصبح الجسم على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى

## الحل

القوى المستوية و المتزنة ( ٧ ، ٨ ، ٣٩ ) ث كجم

تكون :  $\text{مس}$  محصلة ٧ ، ٨ حيث :

$$\text{مس} = ٢٩ + ٦٤ + ٧ \times ٢ + ٨ \times ٨ \times \text{حتا } ٦٠^\circ$$

$$= ١٦٩ \quad \therefore \text{مس} = ١٣ \text{ ث كجم}$$

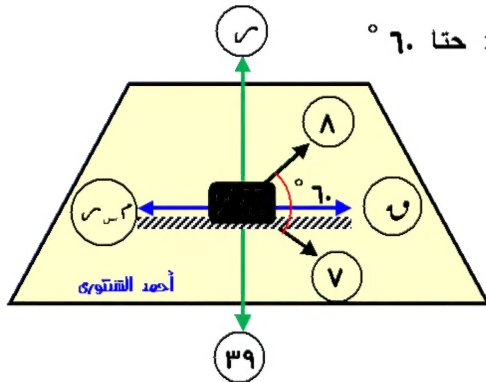
$\therefore$  الجسم على وشك الحركة

$$\therefore \text{مس} = ٣٩$$

$$\text{مس} = ١٣$$

$$\therefore \text{مس} \times ٣٩ = ١٣$$

$$\therefore \text{مس} = \frac{١٣}{٣٩} = \frac{١}{٣}$$

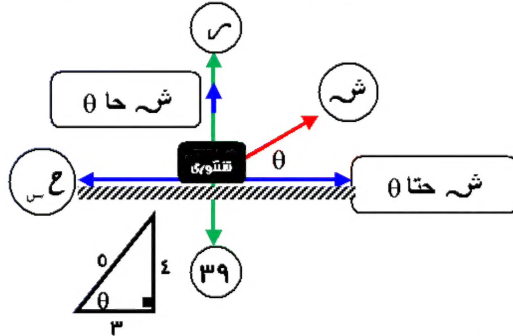




$$\begin{aligned} & \therefore \text{الصندوق على وشك الحركة} \therefore r = w \\ & \therefore 10 = \frac{1}{4} r \\ & \therefore r = 40 \text{ نيوطن} \end{aligned}$$

(١٤) وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستوى أفقى خشن و كان ظل زاوية الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى  $\frac{1}{3}$  ، شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية جيبها  $\frac{4}{5}$  جعلت الجسم على وشك الحركة أوجد :

أولاً : مقدار قوة الشد  
ثانياً : مقدار الاحتكاك السكونى



$$\begin{aligned} & \therefore \text{طال} = \frac{1}{3} \therefore r = 39 \\ & \therefore \text{الجسم على وشك الحركة} \\ & \therefore r + \text{ش ح} \theta = 39 \\ & \therefore r + \text{ش} \times \frac{4}{5} = 39 \\ & \therefore r = 39 - \text{ش} \times \frac{4}{5} \\ & \therefore r = \text{ش ح} \theta = \frac{3}{5} \times \text{ش} \end{aligned}$$

$$\text{أولاً : } \therefore r = 39 - \frac{1}{3} (39 - \text{ش} \times \frac{4}{5})$$

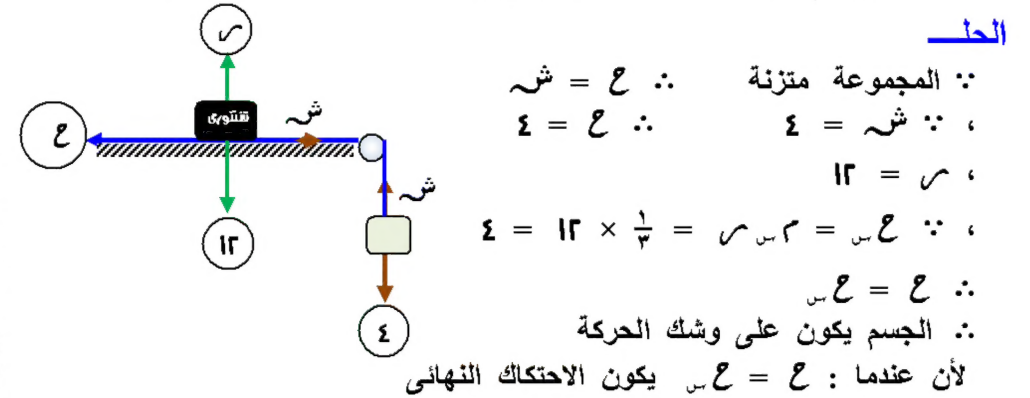
$$\therefore \text{ش} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} (39 - \text{ش} \times \frac{4}{5}) \text{ بالضرب } \times 10 \text{ ينتج :}$$

$$\therefore 9 \text{ ش} = 190 - 4 \text{ ش} \therefore 13 \text{ ش} = 190 \therefore \text{ش} = 10 \text{ نيوتن}$$

$$\text{ثانياً : } \therefore r = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore r = 6 \times \frac{3}{5} = 3.6 \text{ نيوتن}$$

(١٢) وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقى وربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد و يتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزن على النضد فأوجد قوة الاحتكاك و إذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و النضد يساوى  $\frac{1}{3}$  هل يكون الجسم على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك



$$\therefore \text{المجموعة متزنة} \therefore \text{ش} = \text{ع}$$

$$\therefore \text{ش} = 4 \therefore \text{ع} = 4$$

$$\therefore r = 12$$

$$\therefore \text{ع} = 4 = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

$$\therefore \text{ع} = 4$$

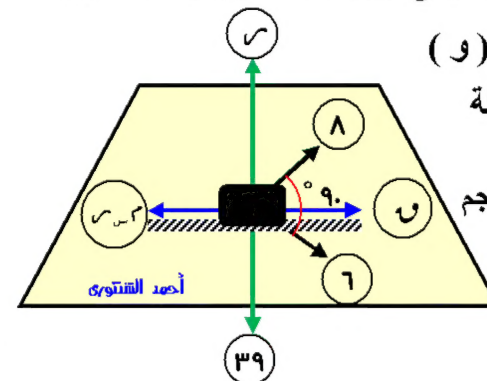
$\therefore$  الجسم يكون على وشك الحركة

لأن عندما :  $\text{ع} = \text{ع}$  يكون الاحتكاك النهائى

(١٣) شد صندوق وزنه (و) ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن حبلين الشد فيهما ٦ ، ٨ ث كجم و يحصران بينهما زاوية قياسها  $90^\circ$  ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الصندوق و المستوى

يساوى  $\frac{1}{5}$  فأوجد وزن الصندوق (و)

إذا كان الصندوق على وشك الحركة



القوى المستوية و المتزنة (و ، ٦ ، ٨) ث كجم

تكون : و محصلة ٦ ، ٨ حيث :

$$w = 36 + 64 = 100$$

$$\therefore w = 10 \text{ ث كجم}$$

## ١ - ٢ ائزان جسم على مستوى مائل خشن

[1] إذا وضع جسم مقدار وزنه ( و ) على مستوى مائل

خشن يميل على بزاوية قياسها  $\theta$ 

و ائزن الجسم على المستوى فإنه يكون متزاناً تحت تأثير قوتين هما :

(1) قوة وزن الجسم  $\vec{W}$  مقدارها ( و )

و تعمل رأسياً لأسفل

(2) قوة رد الفعل المحصل  $\vec{R}$  مقدارها (  $R$  )

و تعمل رأسياً لأعلى

و من الشكل المقابل يكون :  $R = W$ [2] بتحليل القوة  $\vec{R}$  إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين هما :(1) قوة الاحتكاك  $\vec{F}$  مقدارها (  $F$  ) و تعمل فى اتجاه موازى للمستوىلأعلى حيث :  $F = W \sin \theta$ (2) قوة رد الفعل العمودى  $\vec{N}$  مقدارها (  $N$  ) و تعمل فى اتجاهعمودى على المستوى حيث :  $N = W \cos \theta$ و بتحليل القوة  $\vec{W}$  إلى مركبتين

اتجاهين متعامدين هما :

(1) وحتا  $\theta$  فى اتجاه عمودى على

المستوى لأسفل

(2) وحا  $\theta$  فى اتجاه يوازى المستوى لأسفل

كما فى الشكل المقابل :

فإن : معادلتى ائزان الجسم هما :

 $R = W$  وحتا  $\theta$  ،  $F = W \sin \theta$ 

## العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك السكونى و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى :

إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الحركة فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

البرهان :

∴ الجسم على وشك الانزلاق

أى على وشك الحركة لأسفل

المستوى بتأثير وزنه فقط

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ، و مقدارها :  $F = W \sin \theta$ و تصبح معادلتا الاتزان هما :  $R = W \cos \theta$  (1)،  $F = W \sin \theta$  (2)و بقسمة (2) ÷ (1) ينتج :  $F = W \tan \theta$ 

، قوة رد الفعل المحصل تصنع مع العمودى على المستوى زاوية

قياسها = قياس زاوية الاحتكاك السكونى و ليكن قياسها (  $\phi$  )، ∴  $F = W \tan \phi$  ∴  $F = W \tan \theta$  ∴  $\phi = \theta$ كما يمكن استنتاج أن :  $\phi = \theta$  من الشكل

أى أن : قياس زاوية الاحتكاك السكونى = قياس زاوية ميل

المستوى على الأفقى

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك السكونى

كما يلى :  $\tan \phi = \mu_s$  أو  $\tan \theta = \mu_s$ 

أحمد الشنتوي

## ملاحظات :

$$(1) \quad \therefore \mathcal{E} = \text{و ح ا } \theta , \quad \mathcal{M} = \text{و ح تا } \theta$$

$$\therefore \mathcal{M} \mathcal{M} = \text{طال } \times \text{ و ح تا } \theta = \text{و ح تا } \theta \text{ طال}$$

و بالمقارنة بين : و ح ا  $\theta$  ،  $\mathcal{M} \mathcal{M}$  أو المقارنة بين :

$\theta$  ،  $\mathcal{L}$  تحدث للجسم إحدى الحالات التالية :

(1) يسكن ( أى يكون متزاناً ) و ليس على وشك الحركة و يكون الاحتكاك غير نهائى إذا كان :

و ح ا  $\theta > \mathcal{M} \mathcal{M}$  أو  $\mathcal{L} > \theta$  و العكس صحيح

(2) يسكن و لكنه يكون على وشك الحركة و يكون الاحتكاك نهائياً

إذا كان : و ح ا  $\theta = \mathcal{M} \mathcal{M}$  أو  $\mathcal{L} = \theta$  و العكس صحيح

(3) ينزلق على المستوى إذا كان :

و ح ا  $\theta < \mathcal{M} \mathcal{M}$  أو  $\mathcal{L} < \theta$  و العكس صحيح

(2) إذا كان (و) مقدار قوة تجعل الجسم على وشك لأعلى أو تمنع

الجسم من الانزلاق فإن : اتجاه  $\mathcal{M} \mathcal{M}$  يكون لأعلى المستوى

(3) إذا كان (و) مقدار قوة تجعل الجسم على وشك لأسفل

فإن : اتجاه  $\mathcal{M} \mathcal{M}$  يكون لأسفل المستوى

(4) أقل قوة تؤثر على الجسم و يبقى متزاناً هى التى تمنعه من

الانزلاق و يكون : اتجاه  $\mathcal{M} \mathcal{M}$  لأعلى المستوى

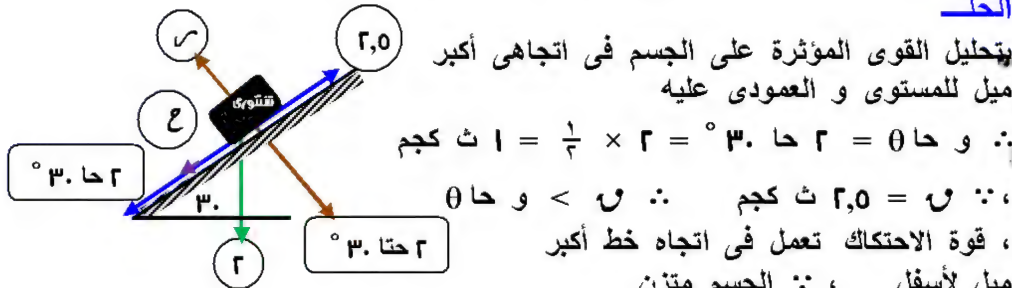
(5) أكبر قوة تؤثر على الجسم و يبقى متزاناً هى التى تجعله على

وشك لأعلى المستوى و يكون : اتجاه  $\mathcal{M} \mathcal{M}$  لأسفل المستوى

## إجابة حاول أن تحل (1) صفحة 10

وضع جسم وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك السكونى بينه و بين الجسم يساوى  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ، أثرت على الجسم قوة تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى مقدارها ٢,٥ ث كجم فإذا كان الجسم متزاناً عين قوة الاحتكاك عندئذ و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟

الحل



$$\therefore \text{و ح ا } \theta = 2 = \text{و ح تا } 30^\circ = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ ث كجم}$$

$$\therefore \mathcal{L} = 2,5 \text{ ث كجم} \therefore \mathcal{L} > \theta \text{ و ح ا } \theta$$

، قوة الاحتكاك تعمل فى اتجاه خط أكبر

ميل لأسفل ،  $\therefore$  الجسم متزن

$$\therefore \mathcal{L} = \text{و ح ا } \theta + \mathcal{E} \therefore 2,5 = \mathcal{E} + 1 \text{ و منها : } \mathcal{E} = 1,5 \text{ ث كجم}$$

$$\mathcal{M} \mathcal{M} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ و ح تا } 30^\circ$$

$$\therefore \mathcal{M} \mathcal{M} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{ و ح تا } 30^\circ \therefore \mathcal{M} \mathcal{M} = \mathcal{E} \therefore \mathcal{L} = \mathcal{M} \mathcal{M}$$

$\therefore$  الاحتكاك يكون نهائياً  $\therefore$  الجسم يكون على وشك الحركة

## إجابة تفكير ناقد صفحة 10

إذا وضع جسم على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ( هـ ) وكان قياس زاوية الاحتكاك السكونى و المستوى ( ل ) ماذا تتوقع أن يحدث للجسم إذا كان :

$$(P) \quad \text{هـ} > \mathcal{L} \quad (B) \quad \text{هـ} < \mathcal{L}$$

الحل

$$(P) \quad \therefore \text{هـ} > \mathcal{L} \therefore \text{الجسم يكون ساكناً ( متزاناً ) و ليس على وشك الحركة}$$



لأن الاحتكاك غير نهائى

(ب)  $\therefore \mu < 1$   $\therefore$  الجسم يكون متحركاً ( ينزلق ) لأسفل المستوى

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٦

وضع جسم مقدار وزنه ٣. نيوتن على مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣. ° ، فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦. ° فأوجد مقدار :

(أ) أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى و تمنعه من الانزلاق

(ب) القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى و تجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

الحل

$\therefore$  الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط عندما يميل المستوى على

الأفقى بزاوية قياسها ٣. °  $\therefore \mu = \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(أ)  $\therefore$  الجسم على وشك الانزلاق لأسفل

$\therefore \mu = \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$10 =$  نيوتن

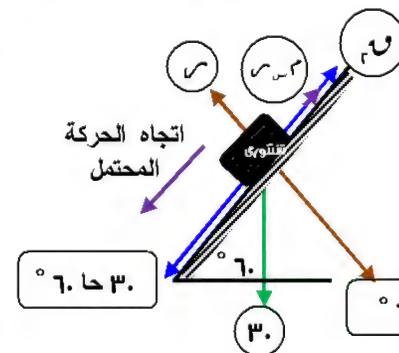
$\therefore \mu = \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3. = \mu + 10 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sqrt{3} \times 10 = \mu + \sqrt{3} \times 0$

$\therefore \sqrt{3} \times 0 - \sqrt{3} \times 10 = \mu$

ومنها :  $\mu = \sqrt{3} \times 10$  نيوتن



(ب)  $\therefore$  الجسم على وشك الحركة لأعلى

$\therefore \mu = \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$10 =$  نيوتن

$\therefore \mu = \tan 3^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3. + 10 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \mu$

$\therefore \sqrt{3} \times 0 + \sqrt{3} \times 10 = \mu$

ومنها :  $\mu = \sqrt{3} \times 10$  نيوتن

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٧

جسم وزنه ٣. نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى  $\frac{5}{13}$  = فإذا زيد ميل المستوى بحيث يكون جيب زاوية ميل المستوى

على الأفقى  $\frac{3}{5}$  :

(أ) أوجد مقدار أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل

للمستوى تمنعه من الانزلاق

(ب) القوة التى تجعله على وشك الحركة لأعلى المستوى و موازية لخط أكبر ميل

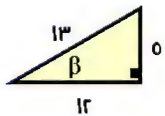
الحل

$\therefore$  الجسم على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط

عندما يميل المستوى على الأفقى بزاوية جيبها  $\frac{5}{13}$

$\therefore \mu = \tan \beta = \frac{5}{13}$

و عندما يصبح جيب زاوية ميل المستوى على الأفقى  $\frac{3}{5}$



## الأفقى

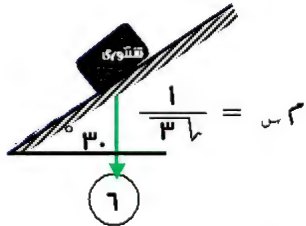
- (٥) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى
- (٦) زاوية الاحتكاك هى الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى و قوة رد الفعل المحصل

## الحل

- (١) × " يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على طبيعة الجسمين المتلامسين "
- (٢) ✓
- (٣) ✓
- (٤) × " إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى "
- (٥) ✓
- (٦) × " هى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل و قوة رد الفعل عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى "

ثانياً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٧) فى الشكل المقابل :

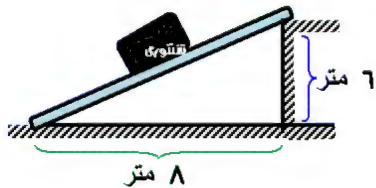


إذا كان الجسم على وشك الانزلاق لأسفل فإن قوة الاحتكاك النهائى تساوى ....

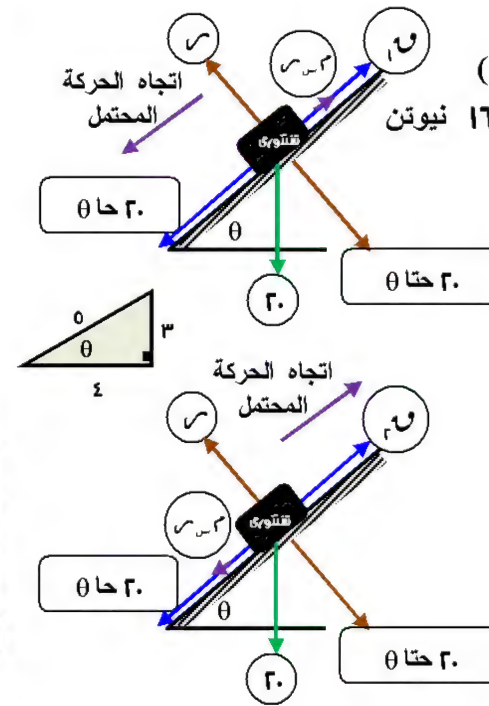
(ب)  $\frac{1}{3} \sqrt{3}$  (د)  $\frac{1}{3}$

(ج)  $\frac{2}{3} \sqrt{3}$  (هـ)  $\frac{2}{3}$

(٨) فى الشكل المقابل :



الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون : قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى ....



(أ) الجسم على وشك الانزلاق ( الجسم على وشك الحركة لأسفل )

$\therefore \mu = 20 \text{ حتا } \theta = \frac{4}{5} \times 20 = 16 \text{ نيوتن}$

$\therefore \mu = 20 \text{ حتا } \theta = 10 + 10 = 20$

$\therefore \frac{2}{5} \times 20 = 10 + 16 \times \frac{4}{5}$

$\therefore \frac{1}{3} = 10 \text{ نيوتن}$

(ب) الجسم على وشك الحركة لأعلى  $\therefore \mu = 20 \text{ حتا } \theta$

$16 = \frac{4}{5} \times 20 =$

$\therefore \mu = 20 + 10 = 30$

$\therefore \frac{2}{5} \times 20 + 16 \times \frac{4}{5} = 30$

$= \frac{5}{3} \text{ نيوتن}$

## حل تمارين (١ - ٢) صفحة ١٧ بالكتاب المدرسى

أولاً : ضع علامة ( ✓ ) أو علامة ( × )

- (١) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على شكلتهما و كتلتهما
- (٢) تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكونى و رد الفعل العمودى بمعامل الاحتكاك
- (٣) ظل زاوية الاحتكاك السكونى يساوى النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى
- (٤) إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن و كان على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على

$$^{\circ} 36,87 \quad (ب) \quad ^{\circ} 41,41 \quad (د) \quad ^{\circ} 48,09 \quad (ج) \quad ^{\circ} 53,13 \quad (ع)$$

(٩) فى الشكل المقابل :

الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل المستوى فيكون :

$$\mu = (\dots) = \dots$$

$$^{\circ} 36,87 \quad (ب) \quad ^{\circ} 41,41 \quad (د) \quad ^{\circ} 48,09 \quad (ج) \quad ^{\circ} 53,13 \quad (ع)$$

الحل

(٧) ∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

حل آخر

$$\mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

(٨) ∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ ظل زاوية الاحتكاك السكونى =  $\frac{1}{8}$

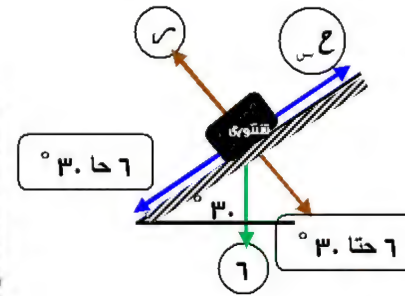
∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى =  $^{\circ} 36,87$

(٩) ∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ قياس زاوية الاحتكاك السكونى يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

∴ ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى = 0,20

∴ قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى =  $^{\circ} 12,04$



(١٠) جسم وزنه ٣٨ ث كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه

إذا وضع على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها  $\frac{1}{4}$  ،

فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل و أثرت عليه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها

$\frac{3}{4}$  و تقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة أوجد مقدار هذه القوة و مقدار رد الفعل

الحل

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل تحت تأثير وزنه فقط إذا وضع على مستوى

خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها  $\frac{1}{4}$  ∴  $\mu = \frac{1}{4}$

على المستوى الأفقى :

∴ الجسم على وشك الحركة

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \mu = 1 = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

(١١) وضع جسم وزنه ٤٠ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية

قياسها  $^{\circ} 3$  و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى  $\frac{3}{4}$

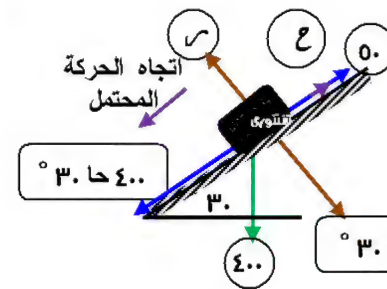
أثرت على الجسم قوة مقدارها ٥٠ ث كجم فى خط أكبر ميل للمستوى

و لأعلى ، إذا كان الجسم متزنًا فعين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان



الجسم على وشك الحركة أم لا

الحل



بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

$$\therefore \text{و } \theta = 30^\circ \text{ حـا } 40 = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$

$$\therefore \text{و } 0 = 50 \text{ ث كجم}$$

$$\therefore \text{و } \theta > 0$$

، قوة الاحتكاك تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى ،

$$\therefore \text{و } \theta = 0 \text{ حـا } 10 = 50 + 0 \therefore \text{و منها : } \theta = 10^\circ \text{ ث جم}$$

$$\therefore \text{و } 40 = 50 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$

$$\therefore \text{و } 10 = 50 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$

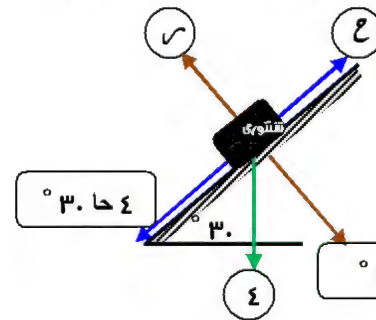
الاحتكاك يكون نهائياً

(١٢) وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى

بزواية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين المستوى  $\frac{3}{4}$

بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، و أوجد مقدار و اتجاه قوة الاحتكاك عندئذ ، ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر على هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل بحيث يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

الحل



بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

$$\therefore \text{و } \theta = 30^\circ \text{ حـا } 4 = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\therefore \text{و } 4 = 4 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$\therefore \text{و } 4 = 4$$

$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \text{و } 3 > 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

، اتجاه قوة الاحتكاك يكون لأعلى ،  
عندما تؤثر على الجسم قوة و يكون  
على وشك الحركة لأعلى

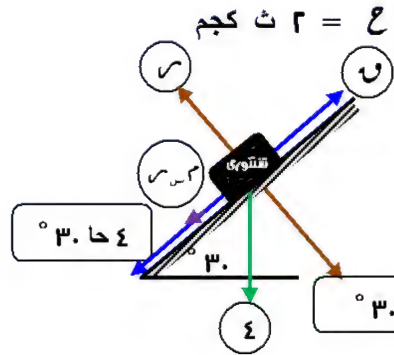
$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \text{و } 3 = 3 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$



(١٣) وضع جسم وزنه ٢٠٠ نيوتن على مستوى مائل يميل على

الأفقى بزواية قياسها ٣٠° ثم شد إلى أعلى بواسطة خيط واقع

فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل و فى اتجاه يصنع زاوية

قياسها ٣٠° مع المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠.٢٥ ،

فأوجد أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل

المستوى

الحل

∴ الجسم على وشك الأنزلاق

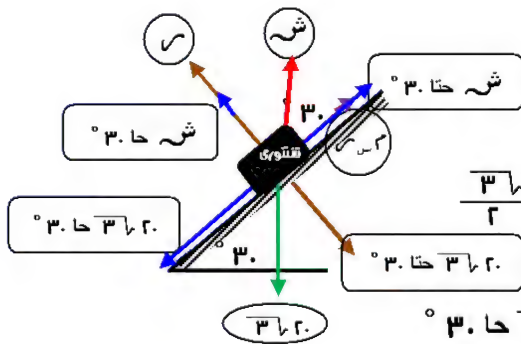
$$\therefore \text{و } 30 = 30 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

$$\therefore \text{و } 30 = 30 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

$$\therefore \text{و } 30 = 30 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

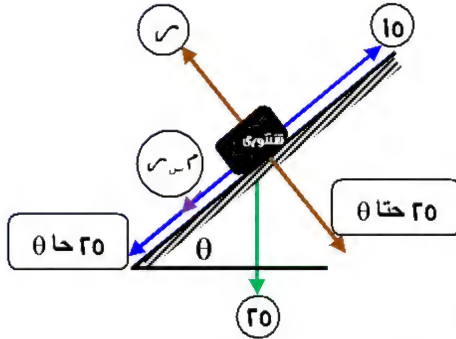
$$\therefore \text{و } 30 = 30 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$

$$\therefore \text{و } 30 = 30 \text{ حـا } 30 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$$



يكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما  $10 = 1$  ث كجم  
فأوجد : (ب) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى  
(ب) معامل الاحتكاك السكونى

الحل



في الحالة الأولى :  
القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى  
من الشكل المقابل معادلات الاتزان هي :  
 $10 = 2 \sin \theta + f$

$$f = 2 \cos \theta$$

$$10 = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$(1) \quad 10 - 2 \sin \theta = 2 \cos \theta$$

في الحالة الثانية :

القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل  
من الشكل المقابل معادلات الاتزان هي :

$$(2) \quad 10 = 2 \sin \theta - f$$

$$f = 2 \cos \theta$$

$$10 = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$$

بالتعويض من (1) ينتج :

$$10 = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta$$

$$10 = 2 \sin \theta - 2 \cos \theta \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

$$\therefore f = 2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 10\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

$$\text{بالتعويض من (1) ينتج : } 10 = 2 \sin \theta + 10\sqrt{3}$$

$$\therefore 10 - 10\sqrt{3} = 2 \sin \theta \quad \text{ومنها : } \sin \theta = \frac{10 - 10\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 20 = (30^\circ - \frac{1}{2}) + 10 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

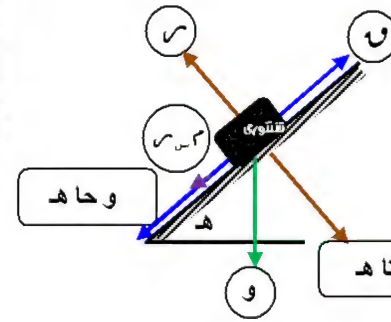
$$\text{بالضرب } \times 2 \text{ ينتج : } (30^\circ - \frac{1}{2}) + 10 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 - \sqrt{3} \times 20$$

$$\therefore 30^\circ = \frac{10 - \sqrt{3} \times 20}{10 - \sqrt{3}} \text{ نيوتن}$$

(14) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فوجد أن أقل قوة توازي خط أكبر ميل للمستوى و تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى :  
٢ و حاه أثبت أن :

(ب) قياس زاوية الاحتكاك = هـ (ب) مقدار رد الفعل المحصل = و

الحل



الجسم على وشك الحركة لأعلى

$$\therefore f = 2 \cos \theta$$

$$10 = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$\therefore 10 = 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$\therefore 2 \cos \theta = 10 - 2 \sin \theta$$

$$\therefore 2 \cos \theta = 10 - 2 \sin \theta$$

$$\text{بالقسمة } \div \text{ و حناه ينتج : } \tan \theta = 1$$

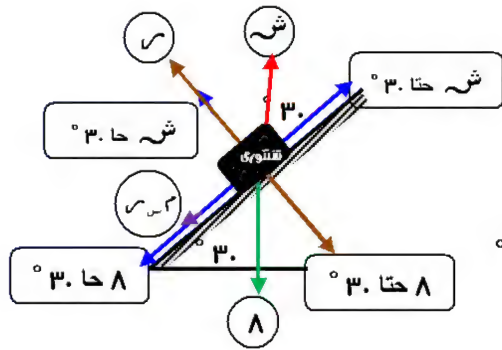
$$(1) \quad \therefore \tan \theta = 1 \text{ ظل زاوية الاحتكاك}$$

$$\therefore \text{قياس زاوية الاحتكاك} = 45^\circ$$

$$(2) \quad \therefore f = 2 \cos \theta = 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$= 2 \cos 45^\circ = \sqrt{2}$$

(10) وضع جسم وزنه ٢٥ ث كجم على مستوى خشن تؤثر عليه قوة و في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى ، فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما  $10 = 1$  ث كجم و



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى ،  
 ∴ ش ٣. حتا ٨ = ش ٣. حتا ٨  
 ∴ ش ٣. حتا ٨ = ش ٣. حتا ٨  
 ∴ ش ٣. حتا ٨ = ش ٣. حتا ٨  
 ∴ ش ٣. حتا ٨ = ش ٣. حتا ٨

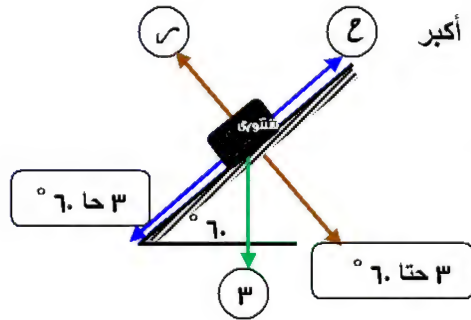
$$\frac{1}{2} \times 8 + ( \frac{1}{2} \text{ ش} - \sqrt{3} \text{ ش} )$$

بالمضرب  $\sqrt{3} \times 2$  ينتج :  $3 \text{ ش} = \sqrt{3} \text{ ش} + \text{ش} - \sqrt{3} \text{ ش}$   
 ∴  $4 \text{ ش} = \sqrt{3} \text{ ش} + 16$   
 ∴  $4 \text{ ش} = \sqrt{3} \text{ ش} + 16$

$$\therefore 4 \text{ ش} = \sqrt{3} \text{ ش} + 16 \Rightarrow 4 \text{ ش} - \sqrt{3} \text{ ش} = 16 \Rightarrow \text{ش} = \frac{16}{4 - \sqrt{3}}$$

(١٨) وضع جسم وزنه ٣ ث كجم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° و كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى  $\frac{\sqrt{3}}{9}$  بين مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً ثم أوجد قيمة أكبر و أصغر قوة أفقية ( واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل ) تؤثر فى الجسم ويبقى متزاناً

الحل



بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

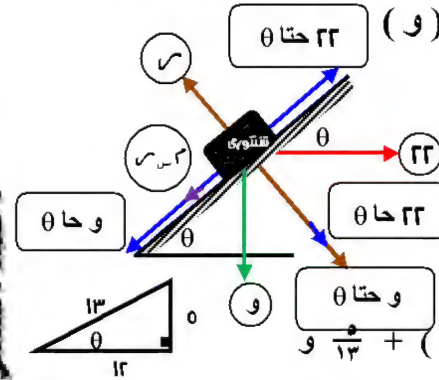
$$\therefore \text{ع ( واحد )} = 3 \text{ حتا } 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 =$$

$$\therefore 3 = 3 \text{ حتا } 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{6}$$

(١٦) وضع جسم وزنه ( و ) على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها  $\frac{5}{13}$  شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى ، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى هو  $\frac{1}{2}$  ، فأوجد مقدار وزن الجسم ( و )



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى  
 ∴ ش ٢٢ حتا theta + ش ٢٢ حتا theta = و

$$\frac{5}{13} \times 22 + و = \frac{12}{13}$$

$$\therefore 22 \text{ حتا } \theta = و + ش ٢٢ حتا \theta$$

$$\therefore \frac{12}{13} \times 22 = و + ( \frac{5}{13} \times 22 + و ) \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{12}{13} \times 22 = و + \frac{5}{13} + و + \frac{5}{13} \times 22 \quad \text{بالمضرب } 13 \times \text{ ينتج :}$$

$$176 = و + 50 + و + 11 \quad \therefore 11 = و + 20.9 \quad \therefore و = 19 \text{ نيوتن}$$

(١٧) وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على مستوى خشن ثم اميل المستوى تدريجياً حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى ٣٠° ، أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم و المستوى ، و إذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد فى اتجاه يميل بزاوية ٣٠° على المستوى حتى أصبح على وشك الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد :

(ب) مقدار رد الفعل العمودى

(٢) مقدار قوة الشد

الحل

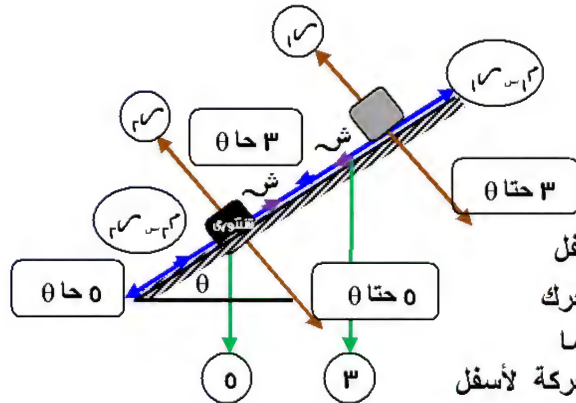
∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى تحت وزنه فقط

$$\therefore \text{ش ٣. طا} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



(١٩) كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن و كان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوي و الجسمين  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{4}{5}$  على الترتيب ، بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم أثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة  $= \frac{3}{4}$

الحل



$\therefore \frac{4}{5} < \frac{2}{3}$  أى أن : معامل

الاحتكاك السكونى للجسم الذى كتلته ٥ كجم < معامل الاحتكاك

السكونى للجسم الذى كتلته ٣ كجم

$\therefore$  الجسم الذى كتلته ٥ كجم يوضع أسفل

الجسم الذى كتلته ٣ كجم حتى يتحرك

الجسمان معاً و الخيط مشدود بينهما

أى الجسمان يكونان على وشك الحركة لأسفل

بالنسبة للجسم كتلته ٥ كجم :  $T = 5 \sin \theta$  ،

$5 \sin \theta = T + 5 \cos \theta \times \frac{4}{5}$   $\therefore 5 \sin \theta = T + 4 \cos \theta$

ومنها :  $T = 5 \sin \theta - 4 \cos \theta$  (١)

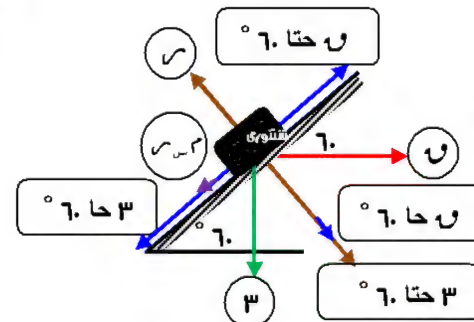
بالنسبة للجسم كتلته ٣ كجم :  $T = 3 \sin \theta$  ،

$3 \sin \theta = T + 3 \cos \theta \times \frac{2}{3}$   $\therefore 3 \sin \theta = T + 2 \cos \theta$

ومنها :  $T = 3 \sin \theta - 2 \cos \theta$

بالتعويض من (١) ينتج :  $5 \sin \theta - 4 \cos \theta = 3 \sin \theta - 2 \cos \theta$

$\therefore 2 \sin \theta = 2 \cos \theta$   $\therefore \tan \theta = 1$   $\therefore \theta = 45^\circ$  بالقسمة  $\div$   $\theta$  ينتج :  $\tan \theta = 1$   $\therefore \theta = 45^\circ$



$\therefore C < \mu$   
 $\therefore$  الجسم لا يمكن أن يبقى ساكناً  
 أكبر قيمة للقوة الأفقية هى التى تجعل الجسم  
 على وشك الحركة لأعلى  
 بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى  
 أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه  
 $\therefore T = 3 \sin \theta + 3 \cos \theta \times \frac{2}{3}$

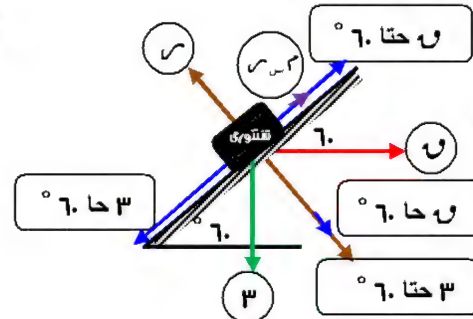
$$\frac{1}{2} \times 3 + T = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$T = 3 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \times 3 + \left( \frac{1}{2} \times 3 + T \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \times 3$$

$$\therefore T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 = T \quad \therefore T = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



أصغر قيمة للقوة الأفقية هى التى تجعل  
 الجسم على وشك الحركة لأسفل  
 بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى  
 أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه  
 $\therefore T = 3 \sin \theta + 3 \cos \theta \times \frac{2}{3}$

$$\frac{1}{2} \times 3 + T = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$T = 3 \sin \theta + 2 \cos \theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \times 3 + \left( \frac{1}{2} \times 3 + T \right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times 3$$

$$\therefore T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 = T \quad \therefore T = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

∴ أصغر مقدار للقوة = و ح ا ( هـ + ل ) و خط عملها يصنع مع المستوى  
زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

**حل آخر**

∴ الجسم متزن تحت ثلاث قوى هي :

و ، و ، ح ا حيث : ح ا = محصلة ح ر ، ح ر

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :

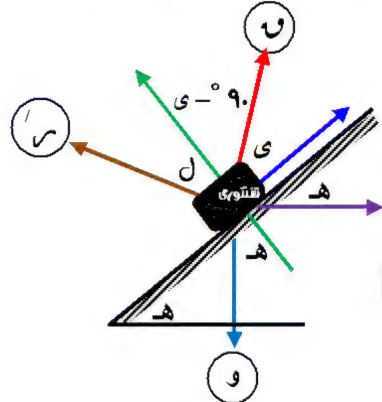
$$\frac{و}{ح ا [ ١٨٠ - ( هـ + ل ) ]} = \frac{و}{ح ا [ ٩٠ - ( ل - ي ) ]}$$

$$\frac{و}{ح ا ( هـ + ل )} = \frac{و}{ح ا ( ل - ي )}$$

$$\frac{و ح ا ( هـ + ل )}{ح ا ( ل - ي )} = و ∴ \frac{و}{ح ا ( ل - ي )} = \frac{و}{ح ا ( هـ + ل )}$$

و يكون مقدار و أقل ما يمكن عندما يكون و ح ا ( ل - ي ) أكبر ما يمكن  
أى عندما : ح ا ( ل - ي ) = ١ ∴ ل - ي = ١ . أى : ل = ي

∴ أصغر مقدار للقوة = و ح ا ( هـ + ل ) و خط عملها يصنع مع المستوى  
زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك



(٢٠) جسم وزنه ( و ) موضوع على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى  
بزاوية قياسها ( هـ ) و زاوية الاحتكاك بينه وبين الجسم قياسها  
( ل ) ، أثرت قوة مقدارها ( و ) و تميل على المستوى لأعلى  
بزاوية قياسها ( ي ) أوجد أصغر مقدار للقوة ( و ) بحيث تجعل  
الجسم على وشك الحركة لأعلى

**الحل**

∴ قياس زاوية الاحتكاك = ل

$$\frac{ح ا ل}{ح ا ل} = \frac{ح ا ل}{ح ا ل}$$

$$\frac{ح ا ل}{ح ا ل} = \frac{ح ا ل}{ح ا ل}$$

∴ الجسم على وشك الجركة  
∴ معادلنا الانزان هما :

$$و ح ا ي = و ح ا هـ + ح ر$$

$$و ح ا هـ + \frac{ح ا ل}{ح ا ل} = و ح ا ي$$

بالمضرب × ح ا ل ينتج :

$$و ح ا هـ ح ا ل + و ح ا ل = و ح ا ي ح ا ل$$

$$و ح ا هـ ح ا ل + و ح ا ل = و ح ا ي ح ا ل$$

بالتعويض من (١) ينتج :

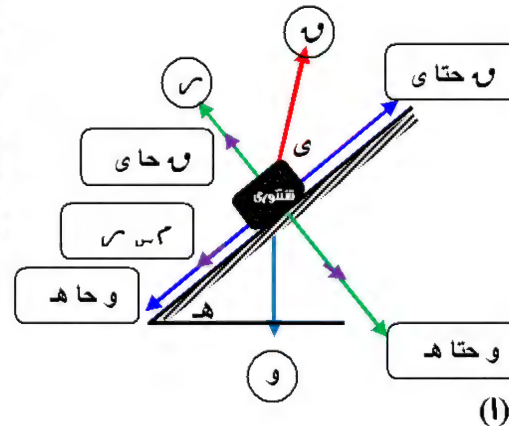
$$و ح ا ي ح ا ل = و ح ا هـ ح ا ل + و ح ا ل$$

$$و ح ا ي ح ا ل = و ح ا هـ ح ا ل + و ح ا ل$$

$$و ح ا ي ح ا ل = و ح ا هـ ح ا ل + و ح ا ل$$

$$\frac{و ح ا ( هـ + ل )}{ح ا ( ل - ي )} = و ∴ \frac{و}{ح ا ( ل - ي )} = \frac{و}{ح ا ( هـ + ل )}$$

و يكون مقدار و أقل ما يمكن عندما يكون و ح ا ( ل - ي ) أكبر ما يمكن  
أى عندما : ح ا ( ل - ي ) = ١ ∴ ل - ي = ١ . أى : ل = ي



أحمد الشنتوي

## حل تمارين عامة صفحة ٢١ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة  
(١) زاوية الاحتكاك هي ....

- (٢) الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و رد الفعل العمودى  
فى حالة الاحتكاك النهائى  
(ب) الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و قوة الاحتكاك النهائى  
(د) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى و قوة الاحتكاك النهائى  
(٤) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى و معامل الاحتكاك الحركى

(٢) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

- (٢) مساحة سطح التلامس (ب) شكل الجسمين  
(د) طبيعة مادة الجسمين (٤) كل ما سبق  
(٣) إذا كان :  $\mu_s$  ،  $\mu_k$  هما معاملى الاحتكاك السكونى و الحركى على  
الترتيب لجسمين متلامسين فإن : ....

- (٢)  $\mu_s = \mu_k$  (ب)  $\mu_s > \mu_k$   
(د)  $\mu_s < \mu_k$  (٤) لا توجد علاقة بينهما

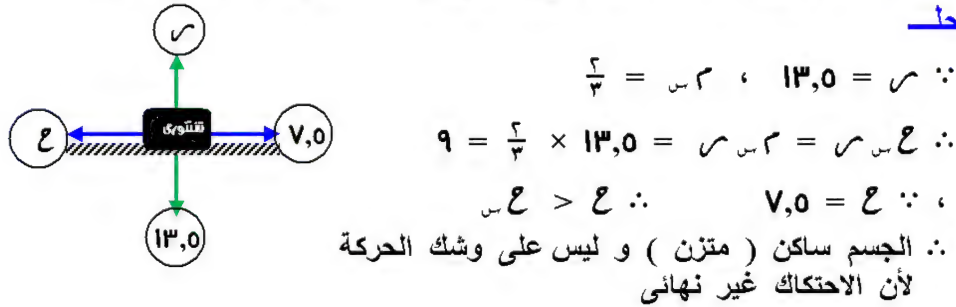
الحل

- (١) زاوية الاحتكاك هي الزاوية المحصورة بين رد الفعل المحصل و رد الفعل العمودى  
فى حالة الاحتكاك النهائى  
(٢) معامل الاحتكاك يتوقف على طبيعة مادة الجسمين  
(٣) إذا كان :  $\mu_s$  ،  $\mu_k$  هما معاملى الاحتكاك السكونى و الحركى على الترتيب  
لجسمين متلامسين فإن :  $\mu_s < \mu_k$

(٤) وضع جسم وزنه ١٣,٥ ث كجم على مستوى أفقى خشن معامل

الاحتكاك بينهما  $\frac{2}{3}$  ، أثرت على الجسم قوة أفقية مقدارها ٧,٥  
ث كجم بين هل الجسم يكون على وشك الحركة ؟ فسر اجابتك

الحل

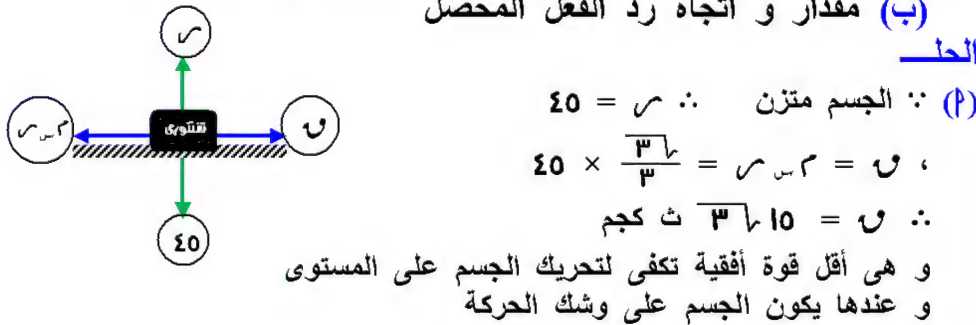


(٥) جسم وزنه ٤٥ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن معامل

الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى  $\frac{3}{4}$  أوجد :

- (٢) مقدار أقل قوة أفقية تكفى لتحريك الجسم على المستوى  
(ب) مقدار و اتجاه رد الفعل المحصل

الحل



- (ب)  $\mu = \frac{f}{N} = \frac{33.75}{45} = \frac{3}{4}$  ،  $\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك  $\mu = 36.9^\circ$   
أى أن : رد الفعل يصنع مع الرأسى زاوية قياسها  $36.9^\circ$



(٦) وضع جسم وزنه ٣٩ نيوتن على مستوى أفقى خشن ، أثرت عليه قوتان مقدارهما ٧ ، ٨ نيوتن و تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأصبح الجسم على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى

**الحل**

القوى المستوية و المتزنة ( ٧ ، ٨ ، ٣٩ ) ثجم

تكون : ٣٩ = ٧ + ٨ + ٣٩

$$٣٩ = ٧ + ٨ + ٣٩$$

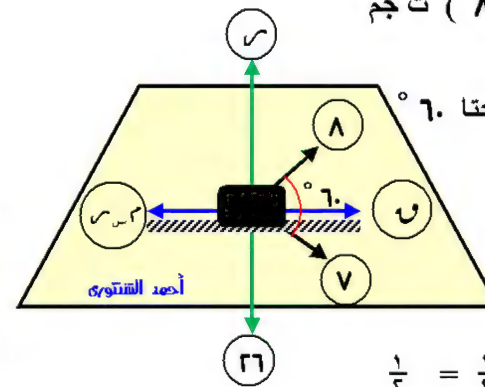
$$١٦٩ = ٣٩ \therefore ١٣ = ٣٩$$

∴ الجسم على وشك الحركة

$$\therefore ٢٦ = ٣٩$$

$$١٣ = ٣٩$$

$$\therefore ١٣ \times ٢٦ = ٣٩ \therefore \frac{١٣}{٣٩} = \frac{٢٦}{٣٩}$$



(٧) وضع جسم وزنه ١٠ ث كجم على مستوي يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فكان الجسم على وشك الانزلاق ، أوجد القوة التى التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لتجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى

**الحل**

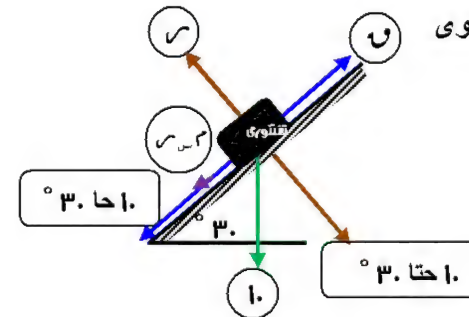
∴ الجسم على وشك الانزلاق لأسفل المستوى تحت تأثير وزنه فقط

$$\therefore ١٠ = ٣٠ \therefore \frac{١}{٣٠} = \frac{١}{٣٠}$$

∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى

$$\therefore ١٠ = ٣٠$$

$$\frac{٣٠}{١٠} = \frac{٣٠}{١٠} \times ١٠ =$$



$$٣٠ = ١٠ + ٣٠$$

$$١٠ = \frac{١}{٣٠} \times ١٠ + \frac{١}{٣٠} \times ٣٠$$

(٨) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى خشن يميل على الأفقى

بزاوية جيب تمامها  $\frac{٤}{٥}$  ، و كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم و المستوى ٤٥° ، بين أن الجسم يبقى متزاناً ثم أوجد مقدار أقل قوة تؤثر على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل و تجعله على وشك الحركة

**الحل**

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه

$$\therefore ٦ = ٦ \times \frac{٤}{٥} = ٤,٨$$

$$٦ = ٦ \times \frac{٤}{٥} = ٤,٨$$

$$\therefore ٦ \times ٤٥ = ٤,٨$$

$$٤,٨ = ٤,٨ \times ١ =$$

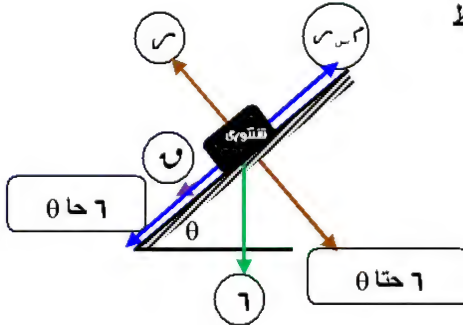
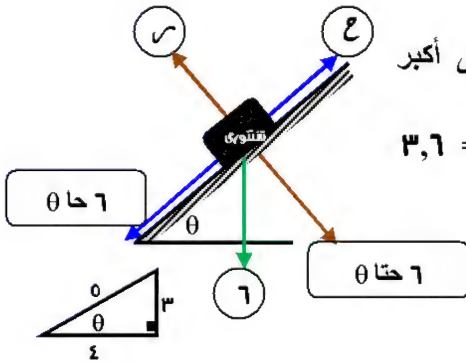
∴  $٦ > ٤,٨$  ∴ الجسم يبقى متزاناً عندما تؤثر على الجسم قوة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل و يكون على وشك الحركة لأعلى

$$\therefore ٦ = ٦ \times \frac{٤}{٥} = ٤,٨$$

$$٦ + ٣ = ٩$$

$$\therefore ٣ \times ٦ - ٤,٨ \times ١ = ١٠$$

$$١٠ = ٣,٦ - ٤,٨ = ١,٢ \text{ نيوتن}$$



## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة الاختبار الأول

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(١) إذا كانت  $\theta$  هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل فإن : معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....

- (١)  $\tan \theta$  (ب)  $\cot \theta$  (ج)  $\tan \theta$  (د)  $\cot \theta$

**الحلـ**

$\therefore \theta$  قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

$\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك  $= 90^\circ - \theta$

$\therefore \mu_s = \tan (90^\circ - \theta) = \cot \theta$

**السؤال الثانى :**

(٢) وضع جسم وزنه (و) على مستوى خشن يميل على على الأفقى

بزاوية قياسها (هـ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو (ل) فاوجد مقدار و اتجاه القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى

**الحلـ**

نفرض أن :  $\vec{Q}$  تميل على

المستوى بزاوية قياسها  $\gamma$

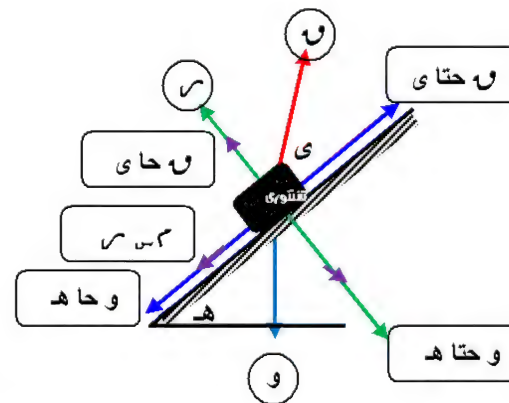
$\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك  $= \gamma$

$\therefore \mu_s = \tan \gamma = \frac{\text{حاله}}{\text{حتاله}}$

$\therefore \mu_s = \mu_s = \frac{\text{حاله}}{\text{حتاله}}$

$\therefore$  الجسم على وشك الحركة

$\therefore$  معادلنا الانزان هما :



$\therefore$  حتاى = و حاه +  $\mu_s$   $\times$  حاله

بالضرب  $\times$  حتال ينتج :

$$\frac{\text{حاله}}{\text{حتاله}} + \text{و حاه} =$$

$\therefore$  حتاى حتال = و حاه حتال +  $\mu_s$  حتال (١)

$\therefore \mu_s + \text{و حاه} = \text{و حاه} + \text{و حاه}$

$\therefore \mu_s = \text{و حاه} - \text{و حاه}$

بالتعويض من (١) ينتج :

$\therefore$  حتاى حتال = و حاه حتال + (و حاه - و حاه)  $\times$  حاله

$\therefore$  حتاى حتال = و حاه حتال + و حاه حتال - و حاه حتال

$\therefore$  حتاى حتال + و حاه حتال = و حاه حتال + و حاه حتال

$\therefore$  حتاى حتال = و حاه حتال

$\therefore$  حتاى حتال = و حاه حتال

و يكون مقدار  $\vec{Q}$  أقل ما يمكن عندما يكون و حاه (ل -  $\gamma$ ) أكبر ما يمكن

أى عندما : حتاى (ل -  $\gamma$ ) = ١  $\therefore$  ل -  $\gamma$  = ١ أى : ل =  $\gamma$

$\therefore$  أصغر مقدار للقوة = و حاه (ل +  $\gamma$ ) و خط عملها يصنع مع المستوى

زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

**حل آخر**

$\therefore$  الجسم متزن تحت ثلاث قوى هى :

و ، و ،  $\mu_s$  حيث :  $\mu_s$  محصلة  $\mu_s$  ،  $\mu_s$

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :

$$\frac{Q}{\sin [180^\circ - (\gamma + \theta)]} = \frac{P}{\sin \theta}$$

$$= \frac{Q}{\sin [180^\circ - (\gamma + \theta)]}$$

$$= \frac{Q}{\sin [90^\circ - (\gamma - \theta)]}$$

$$\therefore \frac{Q}{\sin [90^\circ - (\gamma - \theta)]} = \frac{P}{\sin \theta} \therefore \frac{Q}{\cos (\gamma - \theta)} = \frac{P}{\sin \theta}$$

و يكون مقدار  $\vec{Q}$  أقل ما يمكن عندما يكون و حاه (ل -  $\gamma$ ) أكبر ما يمكن

## الاختبار الثالث

السؤال الأول : أكمل ما يلى

- (١) مقدار أقل قوة أفقية  $\mu$  لازمة لاتزان جسم كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم  $\frac{1}{5}$  يساوى .... ث كجم

الحل

معادلتا الاتزان :

$$\mu = \mu_s , \quad \mu_s = 10$$

$$\therefore \mu = 10$$

ومنها :  $\mu = 10$  ث كجم

$$\therefore \mu = 10 \text{ ث كجم}$$

السؤال الثانى :

- (١) وضع جسم وزنه  $66 \frac{2}{3}$  نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى  $\frac{3}{4}$  ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$  ، فإذا كان الجسم على وشك الحركة ، فما قيمة  $\theta$

الحل

أى عندما :  $1 = ( \mu - \mu_s ) \therefore \mu - \mu_s = 1$  أى :  $\mu = 1 + \mu_s$  أصغر مقدار للفرقة  $= ( \mu + \mu_s )$  و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها  $=$  قياس زاوية الاحتكاك

## الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة (٢) زاوية الاحتكاك هى ....

- (٢) الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل (ب) النسبة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى (ج) النسبة بين معامل الاحتكاك السكونى ومعامل الاحتكاك الحركى (٤) الزاوية المحصورة بين قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل المحصل

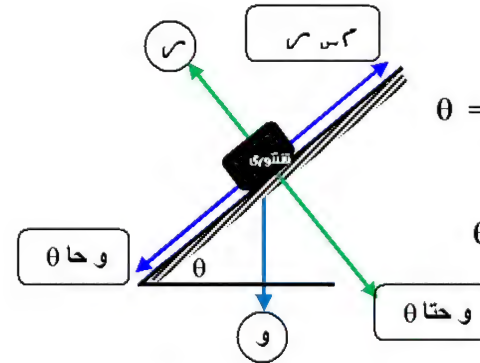
الحل

الزاوية المحصورة بين رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل

السؤال الثانى :

- (٢) برهن أن : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن : قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل



بفرض أن : قياس زاوية الاحتكاك  $= \mu$  ، قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى  $= \theta$  ، الجسم على وشك الانزلاق  $\therefore$  معادلتا الاتزان هما :

$$\mu_s = \mu \text{ و } \mu_s = \mu \text{ و } \mu_s = \mu$$

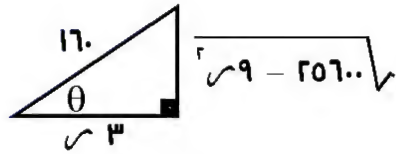
$$\therefore \mu = \theta$$

$$= \mu \text{ و } \mu = \theta$$

ومنها :  $\mu = \theta$  طال  $\mu = \theta$   $\therefore \mu = \theta$ أى أن : قياس زاوية الاحتكاك  $=$  قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى



## حل ثالث



من (١) :  $\frac{3}{16} = \theta$  حتا (٣)

$\frac{\sqrt{16^2 + 3^2}}{16} = \theta$  حتا

من (٢) :  $\theta$  حتا  $20 = \frac{16}{3} - 11$

$\therefore \theta = \frac{16}{3} - 11 = \frac{16 - 33}{3} = -\frac{17}{3}$  حتا

$144 + 192 - 72 = 144$

$\therefore 9 = 16384 + 718 = 16393$

$\therefore 36.87 = \theta$  حتا (٣) ينتج

## حل رابع

من (١) ، (٢) ينتج :  $\theta$  حتا  $30 = \theta$  حتا  $10 = \theta$  حتا

$\theta$  حتا  $30 = \theta$  حتا  $10 = \theta$  حتا

بالتربيع ينتج :  $16 = \theta$  حتا  $20 = \theta$  حتا  $9 + \theta$  حتا

$16 = (\theta - 1) = 30 = \theta$  حتا  $9 + \theta$  حتا

$\therefore 16 = 16 - 16 = 30 = \theta$  حتا  $9 + \theta$  حتا

$\therefore 20 = 9 + \theta$  حتا  $30 = \theta$  حتا  $3 = \theta$  حتا

$\therefore \theta = 36.87$

## حل خامس

من (١) ، (٢) ينتج :  $\theta$  حتا  $30 = \theta$  حتا  $10 = \theta$  حتا

$\theta$  حتا  $30 = \theta$  حتا  $10 = \theta$  حتا

الجسم على وشك الحركة

الاحتكاك نهائى

و معادلتا الأتزان هما :

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$

$\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$

$\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

بالتعويض من (١) ينتج :

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

## حل آخر

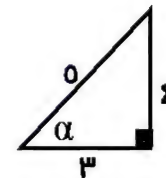
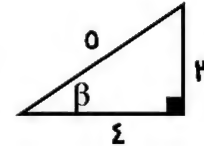
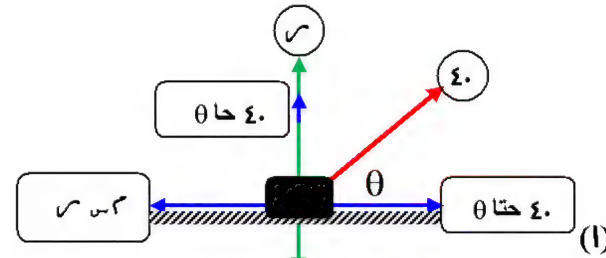
نتبع نفس الخطوات :  $\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

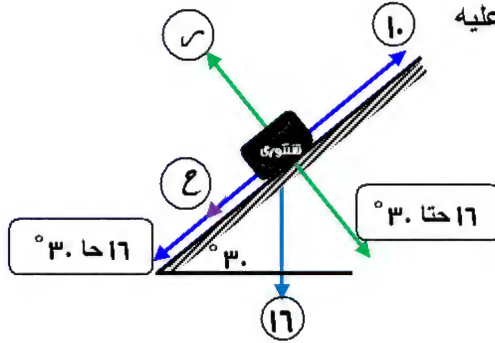
$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$

$\sum M = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_x = 0$  حتا  $\theta$  ،  $\sum F_y = 0$  حتا  $\theta$





بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهى أكبر ميل للمستوى و العمودى عليه  
 $\therefore$  و حا  $16 = \theta$  حا  $30^\circ$

$$8 = \frac{1}{2} \times 16 =$$

$$10 = 10$$

$$\therefore 10 < 10$$

$\therefore$  الحركة المحتملة للجسم تكون إلى أعلى المستوى ،

فتكون قوة الاحتكاك  $E$  لأسفل

، معادلات اتزان الجسم هي :

$$16 \text{ حا } 30^\circ + E = 10$$

$$\therefore 10 = 10 + E \text{ حا } 30^\circ \text{ ومنها : } E = 2 \text{ ث كجم}$$

$$8 = 16 \text{ حا } 30^\circ = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

$$\therefore 8 > 12 \text{ حا } 30^\circ = 12 \times \frac{1}{3} = 4$$

$\therefore E > 8$  الجسم متزن و ليس على وشك الحركة

بالتربيع ينتج :  $9 \text{ حا } \theta = 20 - 2.0 \text{ حا } \theta + 16 \text{ حا } \theta$

$$9 (1 - \text{حا } \theta) = 20 - 2.0 \text{ حا } \theta + 16 \text{ حا } \theta$$

$$\therefore 9 - 9 \text{ حا } \theta = 20 - 2.0 \text{ حا } \theta + 16 \text{ حا } \theta$$

$$\therefore 20 \text{ حا } \theta = 16 + 2.0 \text{ حا } \theta \therefore (2 - \text{حا } \theta) = 0$$

$$\therefore \text{حا } \theta = \frac{2}{3} \therefore \theta = 36.87^\circ$$

### الاختبار الرابع

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(1) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

- (2) مساحة سطح التلامس بين الجسمين  
 (3) طبيعة الجسمين  
 (4) شكل الجسمين  
 (5) كل ما سبق

الحل

طبيعة الجسمين

السؤال الثانى :

(1) وضع جسم وزنه 16 ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية

قياسها  $30^\circ$  و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى  $\frac{1}{3}$

اثر على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى

مقدارها 10 ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك و بين

ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أو لا ؟

الحل

## الاختبار الخامس

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

الحلـ

قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ٥. نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية

قياسها  $\theta$  ، فإذا كان أقل و أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل و

تجعل الجسم متزاناً على المستوى هما ١. ، ٤. نيوتن على الترتيب

اوجد معامل الاحتكاك و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحلـ

فى الحالة الأولى ( أقل قوة )

القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

$$١. + ٢. \sin \theta = ٥.$$

$$٢. \cos \theta = ٥.$$

$$\therefore ١. + ٢. \sin \theta = ٥. \cos \theta$$

$$\therefore ٥. \cos \theta = ١. - ٢. \sin \theta \quad (١)$$

فى الحالة الثانية ( أكبر قوة )

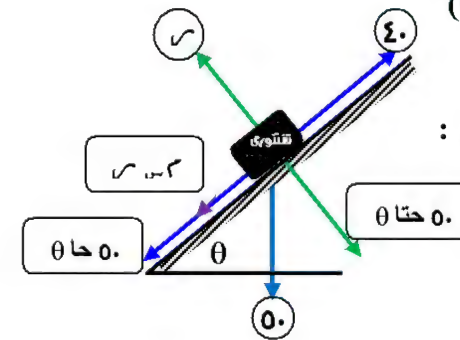
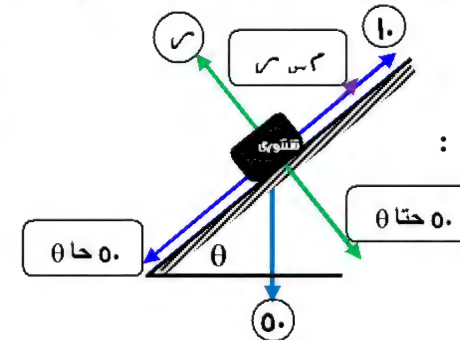
القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى

∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

$$٤. = ٢. \sin \theta + ٥. \cos \theta$$

$$٤. = ٢. \sin \theta + ٥. \cos \theta$$

$$\therefore ٤. = ٢. \sin \theta + ٥. \cos \theta$$



أحمد الشنتوي

بالتعويض من (١) ينتج :

$$٤. = ٥. \cos \theta + ١. - ٢. \sin \theta \quad \text{و منها ينتج :}$$

$$\therefore ٥. \cos \theta = ١. - ٢. \sin \theta \quad \therefore \frac{١}{٢} = \tan \theta \quad \therefore \theta = ٣٠^\circ$$

$$\therefore ٥. = ٢. \sin \theta = \frac{٢}{٢} \times ٥. = ٥. \quad \text{نيوتن ،}$$

$$٢. \cos \theta = ١. - ٢. \sin \theta \quad \therefore ١. = ٢. \cos \theta$$

$$\therefore ١. = ٢. \cos \theta \quad \text{و منها : } \cos \theta = \frac{١}{٢}$$





# المتميز

في

## الرياضيات التطبيقية الأسنانكا

الجزء النظري

و

حلول التمارين

الوحدة الثانية

|| ق ||

( سيم ، صيم )

ع

أحمد

الصف الثالث الثانوي

القسم العلمي

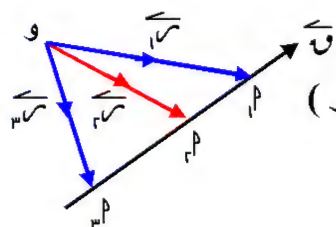
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري

حيث :  $\vec{r}$  متجه موضع نقطة  $P$  على خط عمل القوة بالنسبة للنقطة  $(O)$  ، تسمى النقطة  $(O)$  مركز العزم ، و يسمى المستقيم المار بالنقطة  $(O)$  و عمودياً على المستوى الذى يحوى القوة  $\vec{F}$  و النقطة  $(O)$  بمحور العزم

**ملاحظة :**

عزم القوة هو كمية متجهة و طبقاً لقاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهي يكون متجه عزم القوة بالنسبة للنقطة (و) عمودياً على المستوى الذي يحوى القوة  $\vec{r}$  و النقطة (و)



إجابة تفكير ناقد صفحة v

هل يتوقف عزم القوة  $\vec{F}$  بالنسبة للنقطة (و) على موضع النقطة  $M$  على خط عمل القوة



$$\overleftarrow{p.p} + \overleftarrow{s} = \overleftarrow{p.p} + \overleftarrow{p.o} = \overleftarrow{p.o} = \overleftarrow{s} \quad \therefore$$

$$\overleftarrow{1_P P} + \overleftarrow{P} = \overleftarrow{1_P P} + \overleftarrow{P_P P} + \overleftarrow{P} = \overleftarrow{1_P P} + (\overleftarrow{P_P P} + \overleftarrow{P_P}) =$$

$$\vec{v} \times (\vec{p} + \vec{s}) = \vec{v} \times \vec{s} \therefore$$

$$= \overrightarrow{O} \times \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{O} \times \overrightarrow{MR} =$$

$$" \overline{v} // \overline{p, p} : \text{لأن} " \overline{v} \times \overline{r, s} = \overline{r} + \overline{v} \times \overline{r, s} =$$

$$\frac{1}{v} \times \left( \frac{1}{\rho_{\text{eff}}} + \frac{1}{s} \right) =$$

$$\overline{u} \times \overline{p} + \overline{u} \times \overline{m} =$$

$$\text{" } \overline{u} // \overline{p} : \text{ لأن } \text{" } \overline{u} \times \overline{m} = \overline{v} + \overline{u} \times \overline{m} =$$

$$\frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{v}} = \frac{1}{\vec{u}} \times \frac{1}{\vec{v}} = \frac{1}{\vec{u}} \times \frac{1}{\vec{v}} = \frac{1}{\vec{u}} \times \frac{1}{\vec{v}} \therefore$$

## الوحدة الثانية .... العزوم

## ٢ - ١ عزم قوة بنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثنائى الأبعاد

تمهید :

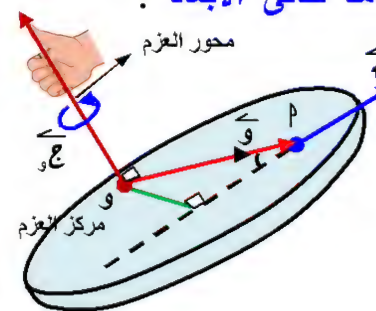
نعلم أن القوة تنتج من تأثير جسم طبيعي على جسم طبيعي آخر وهذا التأثير ينتج عنه صور مختلفة ( تأثير حركة ، تأثير شكلي ، .... )  
و من أنواع الحركة :

الحركة الانتقالية : و فيها تتحرك جميع أجزاء الجسم من موضع إلى آخر مسافات متساوية في اتجاه القوة المحدثه للحركة  
فكل شئ من حولنا في حالة حركة فالشمس تتحرك في الفضاء ،  
و الأشجار تتحرك بفضل الرياح ، ....

و يكون تأثير القوة هنا تأثيراً حركياً انتقالياً  
الحركة الدورانية : وفيها تتحرك جميع أجزاء الجسم على أقواس  
دائرية لها نفس المركز

مثل حركة الكواكب و المراوح و عقارب الساعة ، ....  
و يكون تأثير القوة هنا تأثيراً حركياً دورانياً أى أن القوة قادرة على  
على احداث دوران للجسم حول نقطة و هو ما يعرف : بـ  
**عزم القوة حول نقطة** ، و يعتمد هذا التأثير الدوراني ( العزم ) على  
مقدار القوة و على بعد خط عمل القوة عن هذه النقطة

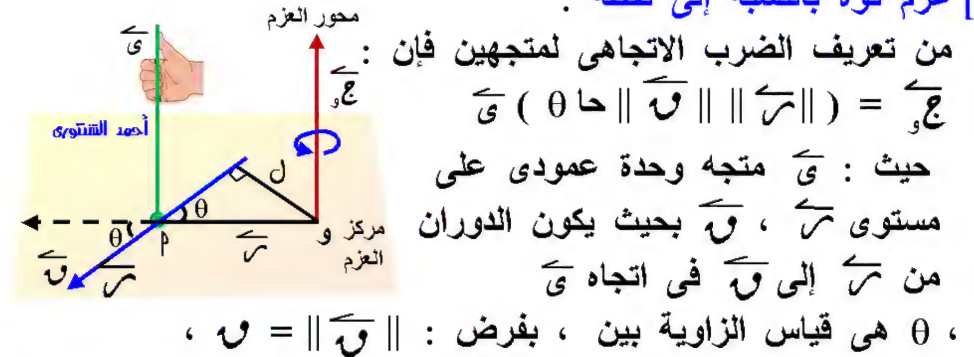
**عزم قوة حول نقطة في نظام إحداثي متعامد ثنائي الأبعاد :**



يعرف عزم القوة  $\vec{Q}$  حول نقطة (و) بأنه مقدرة القوة على إحداث دوران للجسم حول نقطة (و) و يمكن حساب هذا التأثير الدوراني من العلاقة :  $\vec{Q} = \vec{r} \times \vec{F}$

## مفاهيم أساسية :

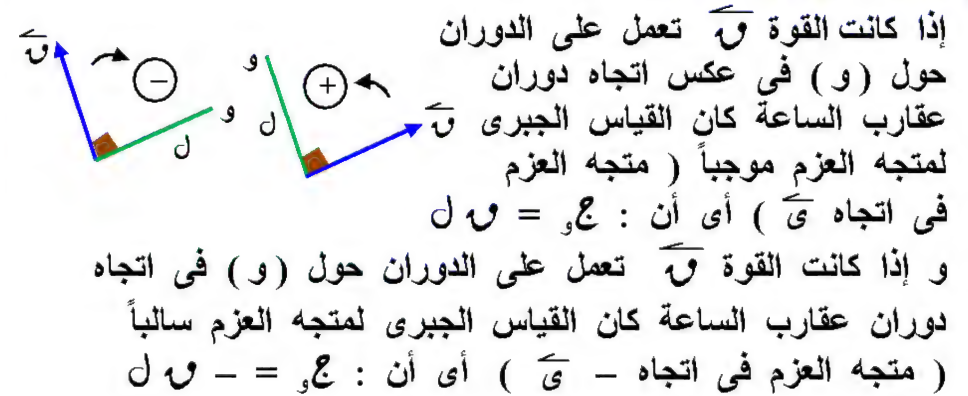
## [1] عزم قوة بالنسبة إلى نقطة :



$\|\vec{r}\| \sin \theta = L$  حيث :  $L$  طول العمود الساقط من ( و ) على خط عمل  $\vec{F}$  (  $L$  يسمى ذراع العزم )

فإن : عزم  $\vec{F}$  حول نقطة ( و ) هو :  $\vec{M} = (L F) \vec{u}$  (1)

## [2] القياس الجبرى للعزم :

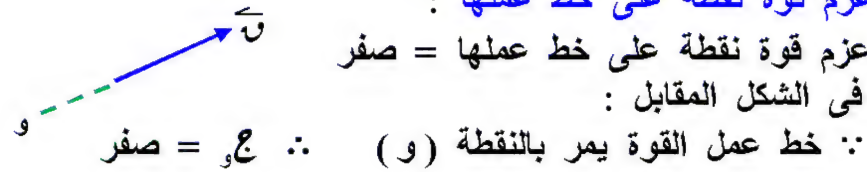


## [3] معيار العزم :

من (1) : معيار العزم هو  $\|\vec{M}\| = L F$

## [4] عزم قوة نقطة على خط عملها :

عزم قوة نقطة على خط عملها = صفر فى الشكل المقابل :



## [5] وحدة قياس مقدار العزم :

وحدة قياس مقدار العزم

= وحدة قياس مقدار القوة  $\times$  وحدة قياس الطول

و منها : نيوتن . متر ، دايين . كم ، ث كجم . متر ، ....

## ملاحظات :

## (1) لاحظ الفرق بين :

(1)  $\vec{M}$  : متجه العزم و هو كمية متجهة

(2)  $M$  : القياس الجبرى لمتجه العزم و هو كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو صفراً

(3)  $\|\vec{M}\|$  : معيار العزم و هو كمية موجبة دائماً حيث :

$$\|\vec{M}\| = \|\vec{r}\| \times \|\vec{F}\| \sin \theta \quad \text{أو} \quad \|\vec{M}\| = L F$$

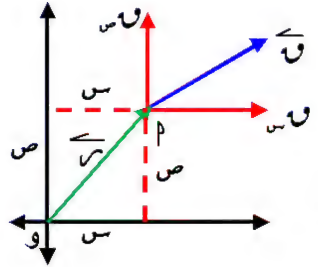
(4) إذا كانت :  $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$  مجموعة يمينية من

متجهات الوحدة ، ( و ) نقطة الأصل ، و إذا أثرت قوة

$$\vec{F} = F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + F_3 \vec{r}_3 \text{ عند النقطة } (P, Q)$$



## مبدأ العزوم ( نظرية فارينون ) :



عزم القوة  $\vec{F}$  بالنسبة لنقطة يساوى مجموع  
عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة  
بفرض القوة  $\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_{s'}$

تؤثر فى نقطة  $P$  متجه موضعها بالنسبة للنقطة

( و ) هو  $\vec{r} = (s, s')$  فإن :

$$\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F} = (s, s') \times (F_s, F_{s'})$$

$$= s F_{s'} - s' F_s$$

$$= \text{عزم } F_{s'} \text{ حول ( و )} + \text{عزم } F_s \text{ حول ( و )}$$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٢٧

فى الشكل المقابل :

احسب القياس الجبرى لعزم القوة ١٠٠ نيوتن  
بالنسبة لنقطة  $P$

الحل

بتحليل القوة ١٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$$F_1 = 100 \cos 40^\circ = 76.6 \text{ نيوتن}$$

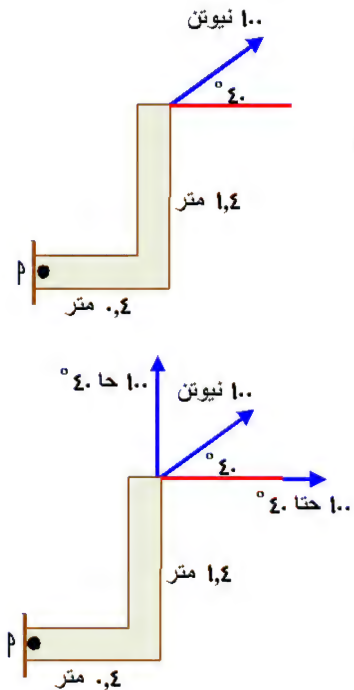
$$F_2 = 100 \sin 40^\circ = 64.28 \text{ نيوتن}$$

و طبقاً لنظرية فارينون يكون :

$$G_P = F_1 \times 1.4 - F_2 \times 0.4$$

$$= 1.4 \times 76.6 - 0.4 \times 64.28$$

$$= 81.5 \text{ نيوتن. متر}$$



$$\text{فإن : } \vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= (s, s') \times (F_s, F_{s'})$$

$$= s F_{s'} - s' F_s$$

و يكون :  $\vec{G}$  [ القياس الجبرى لعزم  $\vec{F}$  حول ( و ) ]

$$= s F_{s'} - s' F_s$$

٥ طول العمود المرسوم من النقطة ( و ) على خط عمل القوة

$$\vec{r} \cdot \vec{F} = \|\vec{r}\| \|\vec{F}\| \cos \theta$$

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٢٦

إذا كانت :  $\{\vec{s}, \vec{v}, \vec{e}\}$  مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

و كانت القوة  $\vec{F} = \vec{s} - 2\vec{v}$  تؤثر فى النقطة  $P(2, 3)$

أوجد : (١) عزم  $\vec{F}$  بالنسبة للنقطة  $B(1, 2)$

(ب) طول العمود الساقط من نقطة  $B$  على خط عمل القوة

الحل

$$\vec{r}_{PB} = \vec{B} - \vec{P} = (1, 2) - (2, 3) = (-1, -1)$$

$$\therefore \vec{G}_B = \vec{r}_{PB} \times \vec{F} = (-1, -1) \times (\vec{s} - 2\vec{v}) = (-1 \times 2 - (-1) \times 0) \vec{e} = -2\vec{e}$$

$$= -2$$

(ب) طول العمود الساقط من نقطة  $B$  على خط عمل القوة

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

## إجابة تفكير صفحة ٢٦

إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة ، ماذا يعنى ذلك ؟

الحل

إذا تلاشى عزم قوة حول نقطة فإن خط عمل القوة يمر بهذه النقطة

## حل آخر

من هندسة الشكل المقابل :

$$r_{12} = r(-, 2) + r(1, 2) = r(P)$$

$$\therefore P = 1,206 \text{ متر}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \div \frac{1}{1} = 1,2807$$

$$\therefore \beta = 10,9202^\circ = 10,9202^\circ - 0^\circ = \theta = 34,051^\circ$$

$$\therefore L = 1,206 \times \sin 34,051^\circ = 0,810$$

$$\therefore M = L \times 100 = 81,0 \text{ نيوتن . متر}$$



## نظرية :

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها

## البرهان :

بفرض  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$  ،

مجموعة محدودة من القوى تؤثر فى نقطة P و بفرض (و) النقطة المطلوب ايجاد العزوم

عندها  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \dots + \vec{r}_n$

مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة (و)

$$\vec{r} \times \vec{r}_1 + \vec{r} \times \vec{r}_2 + \dots + \vec{r} \times \vec{r}_n =$$

$$= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n) \times \vec{r} =$$

$$= \text{عزم محصلة هذه القوى بالنسبة للنقطة نفسها (و)}$$

## النظرية العامة للعزوم :

المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٨

تؤثر القوى :  $\vec{r}_1 = 3\vec{s} - \vec{v}$  ،  $\vec{r}_2 = 2\vec{s} - \vec{v}$  ،  $\vec{r}_3 = 3\vec{s} - \vec{v}$  فى النقطة P (٢، ٤) أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب (١، ١) ثم أوجد عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب

## الحل

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (3, 2) + (2, 2) + (3, 2) = (8, 6)$$

$$\therefore \text{مجموع عزوم القوى حول نقطة ب} = \vec{r} \times \vec{r}_1 + \vec{r} \times \vec{r}_2 + \vec{r} \times \vec{r}_3 =$$

$$= (8, 6) \times (3, 2) + (8, 6) \times (2, 2) + (8, 6) \times (3, 2) =$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = (3, 2) + (2, 2) + (3, 2) = (8, 6)$$

$$\therefore \text{عزم المحصلة حول نقطة ب} = \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

$$= 0 = (8, 6) \times (8, 6) =$$

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٢٩

P مربع طول ضلعه ٦ سم ، ه  $\Rightarrow$  ب د بحيث :  
ب ه = ٤ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى P ، ب ، د ، ه ، ع ، ف ، ج ، ز على الترتيب فإذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة ه أوجد قيمة و

## الحل

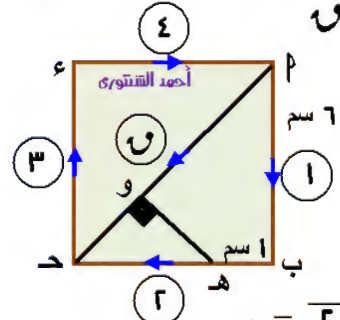
من هندسة الشكل : د ه = ٥ سم

$$\text{ه و} = ٥ \text{ حا } ٥ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ٥ = ٣,٥٣٥$$

،  $\therefore$  خط عمل المحصلة يمر بالنقطة ه

$\therefore$  ج = صفر

$$\therefore = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ٥ + ٥ \times ٣ - ٦ \times ٤ - ١ \times ١ = ٠$$



$$\therefore \frac{8}{2} \sqrt{2} = 4 \text{ ومنها : } 8 \sqrt{2} = 4 \text{ نيوتن}$$

**ملاحظة :**

تتغير إشارة القياس الجبرى للعزوم فقط عند رسم الشكل الهندسى بحسب دوران رؤوسه مع ( أو عكس ) اتجاه دوران عقارب الساعة

**نتائج :**

(١) إذا كان : عزم قوة حول نقطة ب = عزم قوة حول نقطة د

فإن : خط عمل القوة //  $\overrightarrow{BD}$

(٢) إذا كان : عزم قوة حول نقطة ب = - عزم قوة حول نقطة د

فإن : خط عمل القوة ينصف  $\overline{BD}$

**و بصفة عامة :**

إذا أثرت عدة قوى مستوية على جسم و كانت ب ، د نقطتين فى نفس المستوى

(١) فإذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = مجموع عزوم

القوى حول نقطة د فإن : خط عمل المحصلة //  $\overrightarrow{BD}$

(٢) فإذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = مجموع عزوم

القوى حول نقطة د فإن : خط عمل المحصلة ينصف  $\overline{BD}$

**ملاحظة :**

إذا كان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ما و لتكن ء ينعدم فإن :  
إما ء تقع على خط عمل المحصلة أو أن المحصلة هى المتجه الصفرى

**إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٢٩**

تؤثر القوة  $\overrightarrow{Q}$  فى النقطة م (٢، ٣) فإذا عزم  $\overrightarrow{Q}$  حول كل من  
النقطتين ب (١، ٣) ، د (٤، ١) يساوى  $28 \text{ ع}$  أوجد  $\overrightarrow{Q}$

**الحل**

بفرض أن :  $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{Q_x} + \overrightarrow{Q_y}$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{M} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{D} = (1, 3) - (4, 1) = (-3, 2)$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{Q} \times (-3, 2) = (-3, 2) \times (-3, 2) = (9 - 4) \text{ ع} = 5 \text{ ع}$$

$$\therefore 28 = 5 - 1 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{D} = (1, 3) - (4, 1) = (-3, 2)$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{Q} \times (-3, 2) = (-3, 2) \times (-3, 2) = (9 - 4) \text{ ع} = 5 \text{ ع}$$

$$\therefore 28 = 5 - 1 \quad (2) \text{ ، بضرب (1) } \times 2 \text{ وجمعها مع (2) ينتج :}$$

$$1 - 6 = 8 \text{ ، بالتعويض فى (1) ينتج : } 8 = 1$$

$$\therefore \overrightarrow{Q} = 8 \text{ ع}$$

**إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٣٠**

تؤثر القوى :  $\overrightarrow{Q_1} = \overrightarrow{Q_2} + \overrightarrow{Q_3} = \overrightarrow{Q_1}$  ،  $\overrightarrow{Q_1} = \overrightarrow{Q_2} + \overrightarrow{Q_3} = \overrightarrow{Q_1}$

فى النقطة م (٣، ٢) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة

ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب (١، ٥) ،

د (٢، ١)

**الحل**

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q_1} + \overrightarrow{Q_2} = \overrightarrow{Q_1} + \overrightarrow{Q_2} = (1, 5) + (2, 1) = (3, 6)$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{D} = (3, 6) - (1, 5) = (2, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{Q} \times (2, 1) = (2, 1) \times (2, 1) = (4 - 1) \text{ ع} = 3 \text{ ع}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{D} = (3, 6) - (1, 5) = (2, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{Q} \times (2, 1) = (2, 1) \times (2, 1) = (4 - 1) \text{ ع} = 3 \text{ ع}$$

$$\therefore \overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{Q} \times \overrightarrow{r} = \overrightarrow{Q} \times (2, 1) = (2, 1) \times (2, 1) = (4 - 1) \text{ ع} = 3 \text{ ع}$$

$\therefore$  خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين ب ، د



## حل تمارين ( ٢ - ١ ) صفحة ٣١ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يلى :

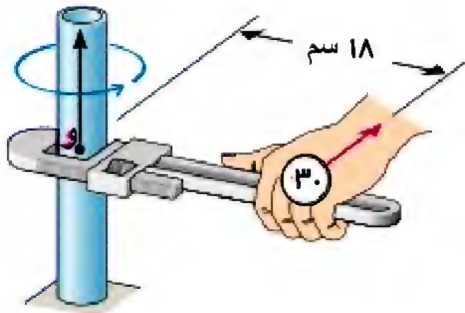
(١) قوة مقدارها ٥٠ نيوتن و تبعد عن نقطة P مسافة ٨ سم

فإن معيار عزم القوة حول نقطة P يساوى .... نيوتن . سم

(٢) فى الشكل المقابل :

معيار عزم القوة حول نقطة

الأصل ( و ) يساوى ....



(٣) قوة : ٤ صـ نيوتن تؤثر فى

نقطة متجه موضعها بالنسبة

إلى نقطة الأصل يساوى ٥ صـ

متر فإن عزم القوة حول نقطة

الأصل يساوى ....

(٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوى صفراً فإن ذلك يعنى ....

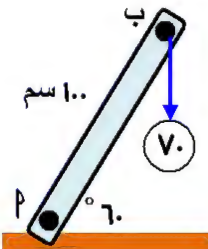
(٥) إذا كان عزم القوة ثابتاً فإن مقدار القوة يتناسب عكسياً مع ....

(٦) فى الشكل المقابل :

قضيب مثبت بمفصل عند P أثرت على الطرف ب

قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن فإن معيار

عزم القوة حول نقطة P يساوى .... نيوتن . متر



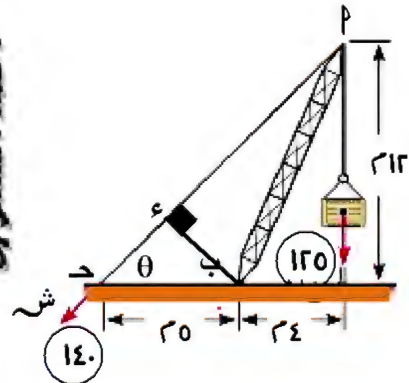
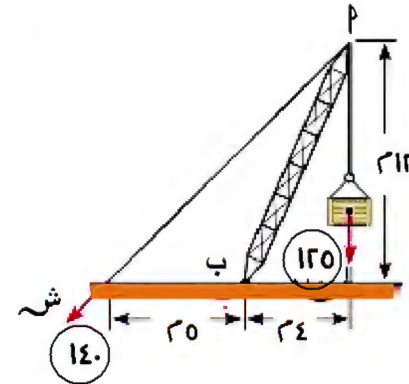
(١) معيار عزم القوة حول نقطة P = ٨ × ٥٠ = ٤٠٠ نيوتن . سم

(٢) معيار عزم القوة حول نقطة الأصل ( و ) = ١٨ × ٣٠ = ٥٤٠

(٣) عزم القوة حول نقطة الأصل = ٥ صـ × ٤ صـ = ٢٠ عـ

(٤) إذا كان عزم قوة حول نقطة ما يساوى صفراً فإن ذلك يعنى خط عمل القوة

يمر بهذه النقطة



## إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٣٠

فى الشكل المقابل :

P تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان

الشد فى الخيط يساوى ١٤٠ نيوتن ،

و وزن الصندوق ١٢٥ نيوتن أوجد :

مجموع عزمى القوتين بالنسبة للنقطة ب

الحل

من هندسة الشكل :

$$r_{20} = r_{(9)} + r_{(12)} = r_{(21)}$$

$$\therefore P = 10 \text{ متر ،}$$

$$ب \text{ ع } = 0 \text{ ح } \theta = 0 \times \frac{12}{10}$$

$$ج \text{ ب } = - 120 \times 2 + 140 \times 0 = - 240$$

$$= - 240 + 0 = - 240$$

$$= 240 \text{ نيوتن . م}$$

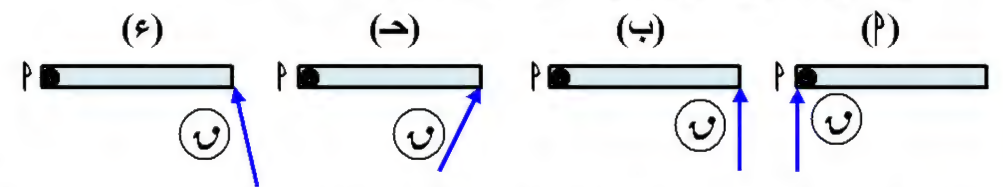
$$(٥) \quad \therefore \frac{G}{J} = \theta, \quad G \text{ ثابت} \quad \therefore \theta \propto \frac{1}{J}$$

$\therefore$  مقدار القوة يتناسب عكسياً مع بعد النقطة عن خط عمل القوة

$$(٦) \quad \text{معيار عزم القوة حول نقطة } P = 70 \times 100 = 7000 \text{ نيوتن. متر}$$

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٧) الأشكال التالية تمثل باب متصل بمفصل عند P ، أثرت عليه قوة  $\vec{Q}$  أى منها تكون القوة  $\vec{Q}$  لها أكبر عزم عند P ....



(٨) قضيب طوله L يمكنه الدوران بسهولة حول

نقطة عند أحد نهايتيه ، أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها Q و تميل على القضيب بزاوية قياسها  $\theta$  ، إذا كانت  $\vec{Q}$  يجب أن تكون عمودية على القضيب فعلى أى بعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر  $\vec{Q}$  بحيث يكون لها نفس العزم ....

(P) L حا  $\theta$  (ب) L حتا  $\theta$  (د) L طا  $\theta$  (ع)

(٩) إذا كان : عزم  $\vec{Q}$  حول النقطة P يساوى عزمها حول النقطة B فإن : ....

(P)  $\vec{Q} \perp \overline{PB}$  (ب)  $\vec{Q}$  تنصف P ب

(د)  $\vec{Q} \parallel \overline{PB}$  (ع) لا توجد علاقة بين  $\overline{PB}$  ،  $\vec{Q}$

الحل

(٧) بفرض أن بعد خط عمل القوة عن  $P = L$  ،  $\theta$  قياس الزاوية بين خط عمل القوة و الباب فيكون :

الشكل (ب) : معيار العزم =  $Q \cdot L \cdot \sin 90^\circ = Q \cdot L$  ، هو له أكبر عزم

أما الشكل (P) : معيار العزم =  $Q \cdot L \cdot \sin 0^\circ = 0$  صفر

( خط عمل القوة يمر بنقطة P )

الشكل (د) :  $Q \cdot L \cdot \sin \theta > 0$  ، لأن :  $\theta$  حادة "

الشكل (ع) :  $Q \cdot L \cdot \sin \theta > 0$  ، لأن :  $\theta$  منفرجة "

(٨) معيار العزم =  $Q \cdot L \cdot \sin \theta$

$\therefore$  إذا كانت  $\vec{Q}$  عمودية يجب أن تكون على  $L = \frac{Q \cdot L}{Q} = L$  من مركز الدوران بحيث يكون لها نفس العزم

(٩) عزم  $\vec{Q}$  حول النقطة P يساوى عزمها حول النقطة B  $\therefore \vec{Q} \parallel \overline{PB}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

$$(١٠) \quad \text{تؤثر القوى : } \vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3, \quad \vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_3$$

فى النقطة  $P(1,1)$  ،  $P(-1,-2)$  على الترتيب ، عين قيمة

كل من الثابتين  $m$  ،  $L$  بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين

حول نقطة الأصل و بالنسبة لنقطة B (2,3)

الحل

$$\vec{r}_1 = (1,1) - (0,0) = (1,1)$$

$$\vec{r}_2 = (-1,-2) - (0,0) = (-1,-2)$$

$$\vec{r}_3 = (2,3) - (1,1) = (1,2) \quad \therefore \vec{r}_3 = (1,2)$$

$$\therefore 0 = (1,2) \times (-1,-2) + (1,1) \times (2,3) \quad \therefore 0 = 2 - 1 = 1$$

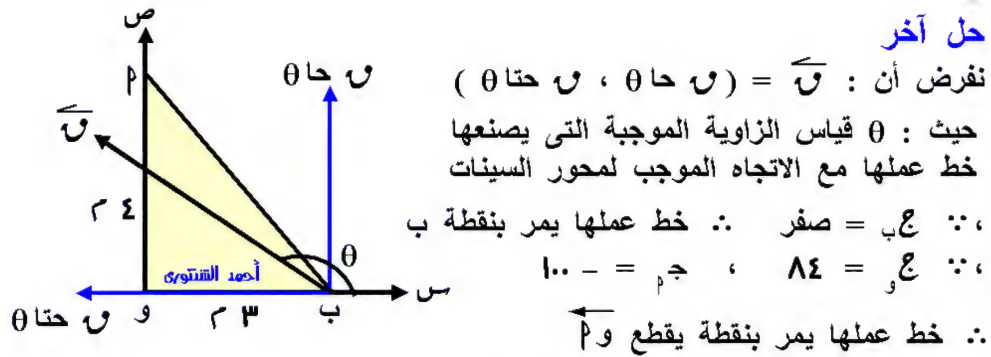
$$\therefore \vec{r}_1 = (1,1) - (2,3) = (-1,-2)$$

$$\therefore \vec{r}_2 = (-1,-2) - (2,3) = (-3,-5)$$





## حل آخر



و تكون كل  $Q \cos \theta$  ،  $Q \sin \theta$  كما بالشكل المقابل

$$\therefore \text{ج ج} = ٨٤$$

$$\therefore Q \sin \theta \times ٣ + ٠ \times \theta \text{ حتا} = ٨٤$$

$$\therefore Q \sin \theta = ٢٨$$

$$\therefore ٣ \times Q \cos \theta = ٨٤$$

$$\therefore \text{ج م} = ١٠٠ -$$

$$\therefore Q \sin \theta \times ٣ + ٤ \times \theta \text{ حتا} = ١٠٠ -$$

$$\therefore ١٠٠ - = ٨٤ + ٤ \times \theta \text{ حتا}$$

$$\therefore Q \sin \theta = ٤٦ -$$

$$\therefore ١٨٤ - = ٤ \times \theta \text{ حتا}$$

$$\therefore \vec{Q} = (٢٨, ٤٦)$$

(١٤) تؤثر القوة  $Q$  فى المستوى (س ، ص) على

المثلث م ب ح ، فإذا كان القياس الجبرى لعزم

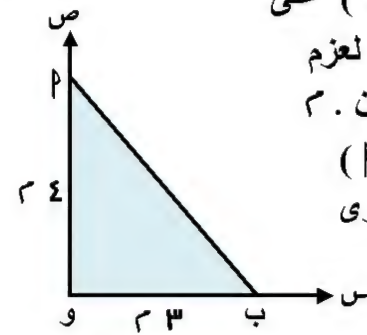
$Q$  بالنسبة لنقطة (و) يساوى ٨٤ نيوتن . م

، القياس الجبرى لعزمها بالنسبة لنقطة (ب)

يساوى - ١٠٠ نيوتن . م ، القياس الجبرى

لعزمها بالنسبة لنقطة (ب) يساوى صفر

عين  $\vec{Q}$



## الحل

نفرض أن :  $\vec{Q} = (Q \cos \theta, Q \sin \theta)$  ، من الشكل نجد : ب (٠، ٣) ، م (٤، ٠)

$\therefore$  ج ب = صفر  $\therefore$   $\vec{Q}$  تؤثر فى نقطة ب (٠، ٣)

$$\therefore \text{ج ج} = ٨٤ ، \vec{Q} = (٠، ٣) - (٠، ٠) = \vec{Q}$$

$$\therefore ٨٤ = (٠، ٣) \times (٤، ٠)$$

$$\therefore ٨٤ = ٤ \times ٣ \therefore ٢٨ = ٤ \quad (١)$$

$$\therefore \text{ج م} = ١٠٠ - ، \vec{Q} = (٤، ٠) - (٠، ٣) = \vec{Q}$$

$$\therefore ١٠٠ - = (٤، ٠) \times (٤، ٣)$$

$$\therefore ١٠٠ - = ٤ \times ٤ + ٠ \times ٣$$

، بالتعويض من (١) ينتج :

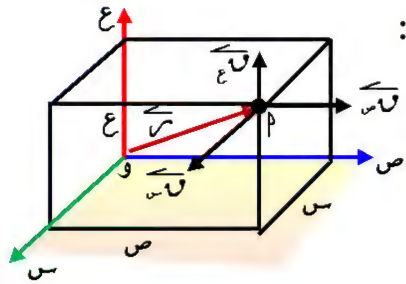
$$١٠٠ - = ٤ \times ٤ + ٨٤$$

$$\therefore ١٨٤ - = ٤ \times ٤ \therefore ٤٦ - = ٤$$

$$\therefore \vec{Q} = (٢٨, ٤٦)$$

$$\frac{\|\vec{C}_O\|}{\|\vec{C}\|} = \text{طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة}$$

$$1,91 = \frac{1381}{1311} \times \frac{1}{19} = \frac{1381}{381} \times \frac{1}{19} = \frac{70 + 29 + 74}{70 + 9 + 4} =$$



المركبات الاحداثية لعزم قوة بالنسبة لنقطة :  
إذا كانت :

$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y + \vec{C}_z$$

تؤثر فى النقطة P متجه موضعها حول  
نقطة الأصل  $\vec{r} = (x, y, z)$   
فإن عزم  $\vec{C}$  حول نقطة الأصل (O)

$$\vec{C} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$= (yC_z - zC_y)\vec{e}_x + (zC_x - xC_z)\vec{e}_y + (xC_y - yC_x)\vec{e}_z$$

أى أن : عزم القوة  $\vec{C}$  له ٣ مركبات هى :  $C_x, C_y, C_z$   
مركبات عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل و هى نفسها مركبات عزم القوة  
حول المحاور x, y, z على الترتيب و بالتالى يكون :

$$C_x = yC_z - zC_y$$

لأن : المركبة  $C_x$  ليس لها عزم دورانى حول محور x لأنها توازى

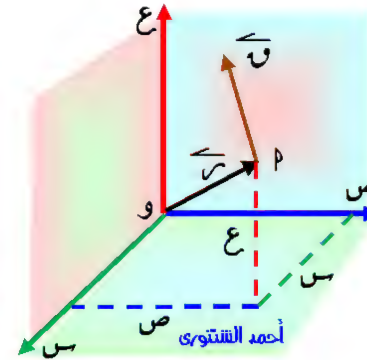
محور x ، المركبة  $C_y$  تعمل على الدوران حول محور y

فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون عزمها  $-C_y \times x$

المركبة  $C_z$  تعمل على الدوران حول محور z فى اتجاه عكس

دوران عقارب الساعة فيكون عزمها  $C_z \times y$

## ١ - ٢ عزم قوة بالنسبة لنقطة فى نظام احداثى ثلاثى الأبعاد



عزم قوة حول نقطة فى الفراغ :

إذا كانت  $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$

تؤثر فى النقطة P  $\vec{r} = (x, y, z)$  التى متجه موضعها بالنسبة للنقطة  
و (0,0,0) هو :

$$\vec{C} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

حول نقطة (O) :  $\vec{C} \times \vec{r} = \vec{C}_O$

$$\vec{C}_O = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٣٤

أوجد عزم القوة  $\vec{C} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 5\vec{e}_z$  و تؤثر فى نقطة

P متجه موضعها حول نقطة الأصل هو  $\vec{r} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$

ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل  $\vec{C}$

الحل

$$\vec{C}_O = (0, 3, 2) \times (1, 1, -1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$







$$\frac{\|\vec{C}\|}{\|\vec{U}\|} = \text{طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة} =$$

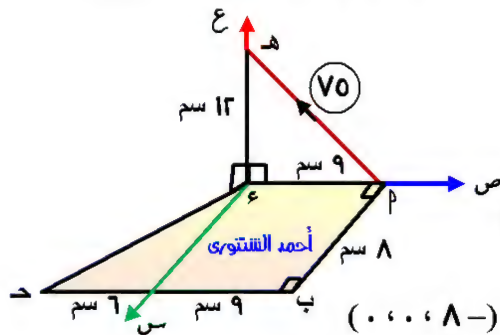
$$1.39 = \frac{27\sqrt{2}}{14\sqrt{2}} = \frac{9+9+9\sqrt{2}}{1+9+4\sqrt{2}} =$$

(٧)  $\vec{P}$  ب د ع شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ،  $\vec{P} \parallel \vec{E}$  ،  $\vec{P} \parallel \vec{B}$  ،

$\vec{P} = 8$  سم ،  $\vec{B} = 10$  سم ،  $\vec{P} = 9$  سم ، رسم

$\vec{E} \perp$  مستوى شبه المنحرف حيث  $\vec{E} = 12$  سم ، أثرت قوة

مقدارها  $V_0$  نيوتن فى  $\vec{P}$  ، أوجد عزم القوة حول النقطة ب



من هندسة الشكل نجد :  $\vec{E} = (12, 0, 0)$  ،

$\vec{P} = (0, 9, 0)$  ،  $\vec{B} = (0, 0, 8)$  ،

$\vec{D} = (12, 0, 0)$  ،

$\vec{P} = (0, 9, 0)$  ،  $\vec{B} = (0, 0, 8)$  ،

$\vec{D} = (12, 0, 0)$  ،

$\vec{P} = (0, 9, 0)$  ،  $\vec{B} = (0, 0, 8)$  ،

$$\vec{U} = \frac{\vec{P} \times \vec{B}}{\|\vec{P} \times \vec{B}\|} = \frac{(12, 9, 0)}{\sqrt{144 + 81}} = \frac{(12, 9, 0)}{15} = (0.8, 0.6, 0)$$

$$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \vec{e}_1(72) - \vec{e}_3(72) = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$$

(٨) إذا كان عزم القوة  $\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B}$  حول نقطة

الأصل (و) يساوى  $\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$  ، وإذا كانت

هذه القوة تمر بنقطة الاحداثى ص يساوى  $\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B}$  ، أوجد الاحداثى س

$$(2) \vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$$

من (١) ، (٢) ينتج :  $\vec{C} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$  ،

(٣)  $\vec{C} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$  ، (٤)  $\vec{C} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$  ،

بالتعويض عن قيمة  $\vec{C}$  من (٣) فى (٤) ينتج :

$\vec{C} = 72\vec{e}_1 - 72\vec{e}_3$  بالقسمة  $\div 72$  ينتج :

$\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  وهى نفس المعادلة (٥)

المعادلات لها عدد لا نهائى من الحلول

نفرض أن :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  حيث :  $\vec{C} \in \vec{C}$

من (٣) ينتج :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  ، من (٥) ينتج :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

من (٣) ينتج :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  ، من (٥) ينتج :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

عندما :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$  ، فإن :  $\vec{C} = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$

(٦) إذا كانت القوة  $\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B}$  تؤثر فى النقطة

$\vec{P} = (1, 3, 2)$  وكانت مركبة عزم  $\vec{C}$  حول محور س يساوى

$\vec{C} = (1, 3, 2)$  أوجد قيمة ب ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل

على خط عمل القوة

الحل

$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

مركبة عزم القوة حول س =  $\vec{C} \cdot \vec{e}_3 = 0$

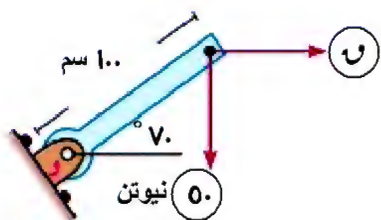
$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

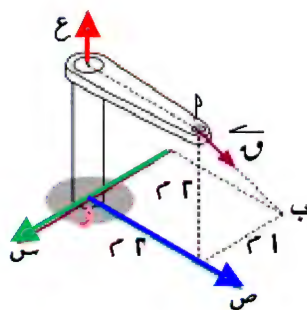
$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\vec{C} = \vec{P} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

## حل تمارين عامة صفحة ٣٩ بالكتاب المدرسي



(1) إذا كان عزم القوة الأفقية و حول نقطة (و) يساوى عزم القوة الرأسية 0. نيوتن حول نقطة (و) فما قيمة و


$$\begin{aligned} & \therefore \text{عزم } \mu \text{ حول (و)} = \mu \times 1. \times \text{ح.ا. } V.^\circ \\ & * \text{، عزم القوة الرأسية حول (و)} = 0. \times 1. \times \text{ح.ا. } V.^\circ \\ & \therefore \text{عزم } \mu \text{ حول (و)} = \text{عزم القوة الرأسية حول (و)} \\ & \therefore \mu \times 1. \times \text{ح.ا. } V.^\circ = 0. \times 1. \times \text{ح.ا. } V.^\circ \text{ بالقسمة } \div 1. \times \text{ح.ا. } V.^\circ \text{ ينتج :} \\ & \mu = 0. \times \text{ط.ا. } V.^\circ = 18.199 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$


(٢) في الشكل المقابل :  
أحسب عزم القوة  $U = 14 \text{ م } 5 \text{ نيوتن}$   
حول نقطة (و)

[illegible]

$$\begin{vmatrix} \overline{ع} & \overline{ص} & \overline{س} \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۲۸- & ۰ & ۱۴- \end{vmatrix} = \overline{و} \times \overline{و} = \overline{ع} \therefore$$

ع ، للنقطة و كذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة

الحمد لله

نفرض أن نقطة تأثير القوة هي (س ، ٢ ، ع )

$$(ع, ٢, س) = (٠, ٠, ٠) - (ع, ٢, س) = \overline{س} \therefore$$

$$\begin{vmatrix} \overline{e} & \overline{u} & \overline{d} \\ e & u & d \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \overline{u} \times \overline{d} = \overline{u}_3 \overline{d} \therefore$$

$$\overline{\underline{\underline{ع}}}(2-3س) + \overline{\underline{\underline{ص}}}(ع2+س) + \overline{\underline{\underline{س}}}(ع3-2-) = \overline{\underline{\underline{ع}}} - \overline{\underline{\underline{ص}}}3 + \overline{\underline{\underline{س}}}0- = \overline{\underline{\underline{ع}}} \therefore ,$$

$$1 = \mathcal{E} \therefore \quad \mathfrak{M} = \mathcal{E} \mathfrak{M} \therefore \quad 0 - = \mathcal{E} \mathfrak{M} - \Gamma - \therefore$$

$$1 = 1 \quad 3 = 3 \quad 1 - 2 = 1$$

، طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة  $\frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{F}\|}$

$$1,0\Lambda = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{1+9+20}}{\sqrt{1+9+4}} =$$

(٩) قوة و = ١٥ س - ٢٥ ص + ٤٠ ع تؤثر في نقطة  
 م (٢-، ٣-، ٣-) أوجد مركبة و حول محور ص



$$\Sigma. = \text{ع} \cup , \Gamma 0 - = \text{ص} \cup , 10 = \text{س} \cup \therefore$$

٢ = ع ، ٣ - = ص ، ٣ - = س ،

∴ مركبة عزم القوة حول ص = ع ق<sub>ص</sub> - س ق<sub>ع</sub>

$$10. = 2. \times ( 3 - ) - 10 \times 2 =$$



(٣) قوة  $\vec{V} = \vec{V}$  تؤثر فى النقطة  $(-3, 0)$  أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة  $(-1, 2)$

الحل

$$\vec{r} = (-2, 2) = (-1, 2) - (0, 3) = \vec{r}$$

$$\therefore \text{عزم القوة} = (V, 0) \times (-2, 2) = -2V$$

(٤) القوة  $\vec{F} = \vec{F}$  نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها  $\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}$  متر و قوة أخرى  $\vec{F} = \vec{F}$  نيوتن تؤثر فى نقطة متجه موضعها  $\vec{r} = \vec{r} + \vec{r}$  أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة الأصل

الحل

$$\vec{r} = (2, 2) \times (1, 2) + (1, 2) \times (2, 2) = (0, 0)$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$

(٥) إذا كانت  $\vec{r}$ ،  $\vec{r}$ ،  $\vec{r}$  مجموعة يمينية من متجهات الوحدة و كانت القوة  $\vec{F} = \vec{F}$   $\vec{r} = \vec{r} + \vec{r} + \vec{r}$  تؤثر فى النقطة  $P(1, 0, 1)$ ، و كان عزم القوة  $\vec{F}$  بالنسبة للنقطة  $B(2, 1, 3)$  يساوى  $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r}$  فما قيمة  $n$

الحل

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = (3, 1, 2) - (1, 0, 1) = (2, 1, 1)$$

$$\vec{r} = \vec{r} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{r} & \vec{r} \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{r} \times \vec{r} = \vec{r}$$

$$= (2, 1, 1) \times (2, 1, 1) = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$



(٦) فى الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة د

الحل

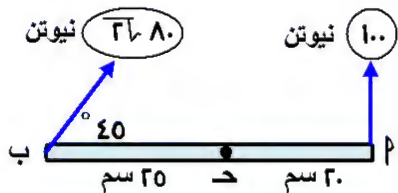
بتحليل القوتين : ٦٠ إلى

المركبتين ٦٠ حنا ٣٠° ، ٦٠ حنا ٣٠° فى اتجاهى محورى س ، ص على الترتيب ، ٣٠ إلى المركبتين ٣٠ حنا ٣٠°

٣٠ حنا ٣٠° فى اتجاهى محورى س ، ص على الترتيب حيث : حنا ٣٠° ، حنا ٣٠°

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$



(٧) فى الشكل المقابل :

أثبت أن محصلة القوتين ١٠ نيوتن ، ٨٠ نيوتن تمر بالنقطة د

الحل

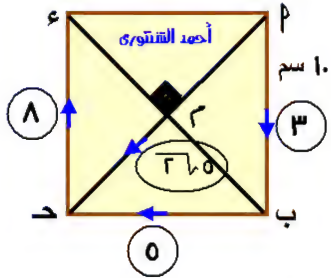
$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$

$$\vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = \vec{r}$$

∴ محصلة القوتين تمر بالنقطة د



أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى :  
(أ) بالنسبة للنقطة P (ب) بالنسبة للنقطة ب



(ج) بالنسبة لمركز المربع  
الحل

من هندسة الشكل : ب أ = 10 ، 10 = 10

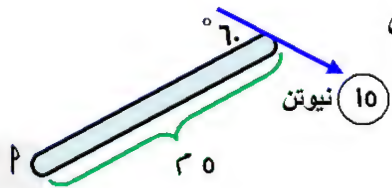
$$10 = 10 = 10$$

$$10 \times 8 - 10 \times 0 - = 10 \times 3 - = 10 \times 5 - =$$

$$10 \times 8 - 10 \times 0 - = 10 \times 3 - = 10 \times 5 - =$$

$$10 \times 8 - 10 \times 0 - = 10 \times 3 - = 10 \times 5 - =$$

$$10 \times 8 - 10 \times 0 - = 10 \times 3 - = 10 \times 5 - =$$



(٩) الشكل المقابل يمثل تأثير قوة 10 نيوتن

على ذراع مثبتة بمفصل عند P  
أوجد القياس الجبرى لعزم القوة  
بالنسبة لنقطة P

الحل

من هندسة الشكل :

$$10 = 10 = 10$$

$$10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 =$$

$$10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 =$$

$$10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 = 10 \times 10 \times 0.5 =$$

(٧) إذا كان  $\vec{r} = (2, -3, 1)$  تؤثر فى النقطة  $(1, 1, 1)$  فإن :  
مركبة  $\vec{r}$  حول محور س تساوى ....

$$7 \text{ (ب) } -2 \text{ (ب) } 0 \text{ (د) } 2 \text{ (ع)}$$

الحل

(١) من الشكل المقابل :

$$b = 10 \text{ حتا } \theta$$

(٢) بفرض أن :  $\vec{r} = (2, -1, 1)$  ،  $\vec{b} = (1, -3, 1)$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = (2, -1, 1) \cdot (1, -3, 1) = 2 - 3 + 1 = 0$$

$$\vec{r} \cdot \vec{b} = 0 \therefore \text{البعء بين النقطتين } = 0 \text{ وحدات طول}$$

$$3 = \|(1, 2, 2)\| \therefore (3)$$

$\therefore$  جيوب تمام الاتجاه للمتجه هى :  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$

(٤) من الشكل المقابل :

$$10 = 10 = 10$$

$$10 = 10 = 10$$

$$(1, 2, 2) \times (1, -3, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(2-2) - \vec{j}(1-2) + \vec{k}(-3-2) = \vec{j} - 5\vec{k}$$

$$(7) \therefore \vec{r} = (2, -3, 1), \vec{b} = (1, -3, 1), \vec{c} = (1, 1, 1), \vec{d} = (1, 1, 1)$$

$\therefore$  مركبة عزم القوة حول س = ص ع - ع ص

$$7 = (3 -) \times 1 - 1 \times 1 =$$

أجب عن الأسئلة الآتية

(٨) ب د ع مربع طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٨

$$10, 5, 8 \text{ ث كجم فى الاتجاهات } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$$



## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) إذا كانت القوة  $\vec{Q} = \vec{S} - \vec{O}$  تؤثر فى النقطة( - ١ ، ١ ) فإن : عزم القوة  $\vec{Q}$  بالنسبة لنقطة الأصل

يساوى ....

(١)  $\vec{Q} - \vec{P}$  (ب)  $\vec{Q} - \vec{R}$  (ج)  $\vec{Q} - \vec{S}$  (د)  $\vec{Q} - \vec{O}$  (هـ)  $\vec{Q} - \vec{A}$ 

الحل

$$\vec{Q} = (\vec{S} - \vec{O}) \times (\vec{O} - \vec{A}) = \vec{S} \times \vec{O} = \vec{Q}$$

## السؤال الثانى :

(١) الشكل المقابل :

يوضح شداد  $P$  ب يؤثر علىعمود مائل  $د$  ع

أوجد معيار عزم قوة الشد

بالنسبة للنقطة  $ع$ 

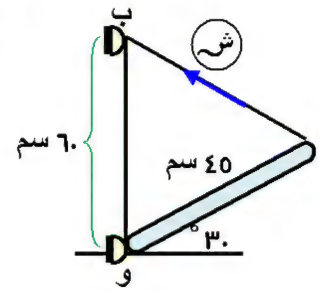
الحل

نرسم  $\vec{P} \perp \vec{د$  ،  $\vec{د} \perp \vec{حى}$  ،من  $\Delta P د حى$  القائم الزاوية فى  $د$ 

$$\therefore (\vec{د} \cdot \vec{حى}) = (\vec{د} \cdot \vec{P}) + (\vec{حى} \cdot \vec{P})$$

$$7,29 = (1) + (2,3) =$$

$$\therefore \vec{P} د = 2,0.798 ، \vec{P} حى = 3,987$$

من  $\Delta P د حى$  القائم الزاوية فى  $د$  :

(٩) فى الشكل المقابل :

الشد فى الخيط  $\vec{P}$  مقداره ١٥ نيوتنأوجد القياس الجبرى لعزم القوة بالنسبة للنقطة  $و$ 

الحل

من  $\Delta P ب و$  :  $\vec{P} \cdot \vec{و} = (\vec{P} \cdot \vec{و}) = 6 \times 40 \times \sin 3^\circ$ 

$$\therefore (\vec{P} \cdot \vec{و}) = 6 \times 40 \times \sin 3^\circ = 13.10$$

$$\therefore \vec{P} ب = 13.10$$

$$\therefore \text{حساب} = \frac{(\vec{و} \cdot \vec{و}) - (\vec{و} \cdot \vec{ب}) + (\vec{و} \cdot \vec{د})}{13.10 \times 6 \times 2}$$

$$\therefore \vec{و} \cdot \vec{ب} = 6 \times 40 \times \sin 3^\circ = 13.10$$

$$\therefore \vec{و} \cdot \vec{ب} = 6 \times 40 \times \sin 3^\circ = 13.10$$

(١١) إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار

حول ( و ) يساوى ٤٠٠ نيوتن . سم

أوجد أقل قيمة للقوة  $\vec{و}$  و قيمة $\theta$  التى تحقق دوران المسماربالنسبة للنقطة  $م$ 

الحل

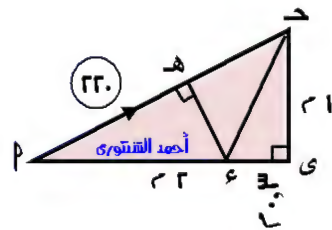
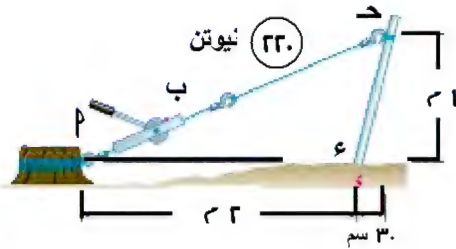
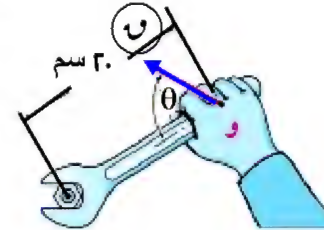
$$\therefore \vec{و} \cdot \vec{م} = 400 \times 20 = 8000$$

$$\therefore \vec{و} \cdot \vec{م} = 8000$$

و تكون أقل قيمة للقوة  $\vec{و}$  عندما يكون : المقام "  $\theta$  " أكبر ما يمكن

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

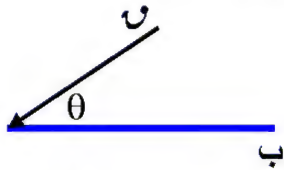
$$\therefore \vec{و} = 20 \text{ نيوتن و هى أقل قيمة تحقق دوران المسمار}$$



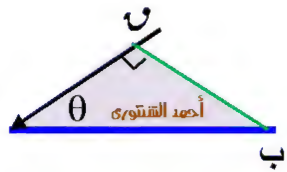
## الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) الشكل المقابل يوضح :



(أ) ٠° (ب) ٩٠° (ج) ٤٥° (د) ٣٠°



و يكون : ج ب أكبر ما يمكن عندما : ح ا = ا أى عندما : ٩٠° = ٩٠°

السؤال الثانى :

(١) إذا كانت القوة  $\vec{P} = 0\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$  تؤثر فى النقطة

(١، ٢، ١- ) أوجد :

أولاً : عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل

ثانياً : طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل  $\vec{P}$ 

الحل

$$\vec{P} = (1, 2, -1) \quad , \quad (3, -1, 0) =$$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(2 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) - \vec{j}(1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3) + \vec{k}(1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$M_H = P \times d = 3.987 \times 2 = 7.974 \text{ نيوتن.م}$$

$$M_G = P \times d = 7.974 \times 220 = 175.4 \text{ نيوتن.م}$$

السؤال الخامس :

(١) فى الشكل المقابل :

قوة  $620 \text{ نيوتن}$ تؤثر فى  $H$ 

أوجد مركبات عزم القوة بالنسبة لمحاور الاحداثيات

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{H} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{G} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{H} = \vec{G} - \vec{H} = (0, 1, 0) - (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{G} = \frac{(\vec{H} \cdot \vec{G})}{\|\vec{H}\|^2} \vec{H} = \frac{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\| (0, 1, 0) \|^2} (0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$(20, 0, 20) =$$

$$\vec{H} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{G} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{H} \times \vec{G} = (20, 0, 20) \times (0, 1, 0) = (20, 20, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 20\vec{j}$$

∴ مركبة عزم  $\vec{P}$  بالنسبة لمحور س = ٥٠٠ -مركبة عزم  $\vec{P}$  بالنسبة لمحور ص = ٢٥٠ -مركبة عزم  $\vec{P}$  بالنسبة لمحور ع = صفر

## حل آخر

من هندسة الشكل :

$$\angle (P \Delta D) = 10^\circ$$

من  $\Delta P \Delta D$  :

$$\angle (D) = \angle (P) + \angle (D \Delta P)$$

$$2 \angle (P) + \angle (D \Delta P) = 10^\circ$$

$$2 \times 30^\circ + \angle (D \Delta P) = 10^\circ$$

$$\angle (D \Delta P) = 10^\circ - 60^\circ = -50^\circ$$

$$\angle (D \Delta P) = 32,6^\circ$$

$$\angle (D \Delta P) = 32,6^\circ$$

$$19,02 \text{ نيوتن}$$

ومنها ينتج :  $19,02 \text{ نيوتن}$ 

## حل ثالث

من هندسة الشكل :

$$\angle (D \Delta H) = 60^\circ , \angle (D \Delta E) = 30^\circ$$

$$\angle (D \Delta H) = 30^\circ \text{ ح. } 10^\circ \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta H) = 30^\circ \text{ ح. } 20,98 \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta H) = 30^\circ \text{ ح. } 20,98 \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta H) = 20,98 + 3 = 23,98 \text{ سم}$$

، احداثيات النقط هي :

$$(0,0,0) = P$$

$$(10,0,23,98) = D$$

$$\vec{PD} = \vec{D} - \vec{P} = \vec{D}$$

$$(10,0,23,98) =$$

$$(10,0,23,98) = (0,0,0) -$$

،  $\therefore$  خط عمل القوة // محور ص ، و فى اتجاهه السالب

$$194 \text{ ل.} = \|\vec{H}\| \therefore$$

$$35 \text{ ل.} = \|\vec{U}\| \therefore$$

$$194 = 81 + 64 + 29 = \|\vec{H}\|$$

$$35 = 9 + 1 + 25 = \|\vec{U}\|$$

$$\frac{194}{35} = \frac{\|\vec{H}\|}{\|\vec{U}\|} = \text{طول العمود}$$

## السؤال الخامس :

(1) فى الشكل المقابل :

إذا كان عزم القوة العمودية على ذراع الدوران بالنسبة لنقطة P يساوى ٦٢٠ نيوتن . سم أوجد

## الحل

القوة عمودية على ذراع الدوران  $\overline{PD}$  :

من هندسة الشكل :

$$\angle (D \Delta E) = 30^\circ$$

من  $\Delta D \Delta E$  :

$$\angle (D \Delta E) = 30^\circ \text{ ح. } 10 \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta E) = 30^\circ \text{ ح. } 20,98 \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta E) = 30^\circ \text{ ح. } 20,98 \text{ سم}$$

$$\angle (D \Delta E) = 20,98 + 3 = 23,98 \text{ سم}$$

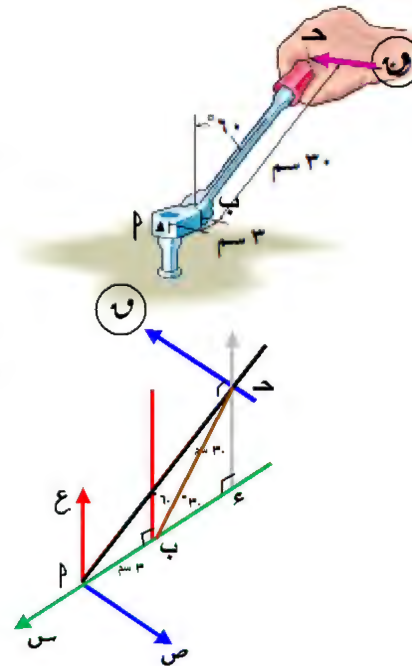
من  $\Delta D \Delta E$  :

$$\angle (D \Delta E) + \angle (D \Delta H) = \angle (D \Delta E) + \angle (D \Delta H) = \angle (D \Delta H)$$

$$\angle (D \Delta H) = 32,6^\circ$$

$$\angle (D \Delta H) = 32,6^\circ$$

$$32,6^\circ \times U = 620$$

ومنها ينتج :  $19,02 \text{ نيوتن}$ 

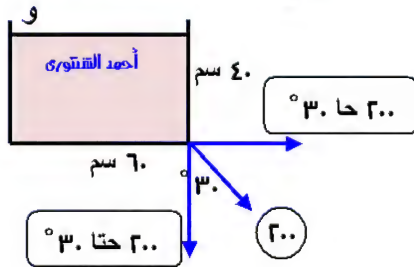
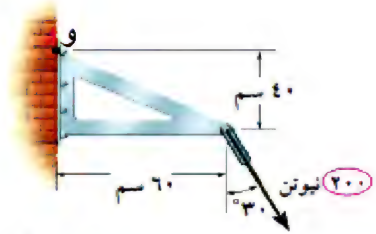


## الاختبار الثالث

السؤال الأول : أكمل ما يلى  
(٣) إذا كانت :  $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2$  ،  $\vec{r}_1 = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$  ،  
،  $\|\vec{r}_1\| = 5\sqrt{2}$  وحدة فإن :  $\vec{r}_2 = \dots$

الحل

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 &\therefore \vec{r}_1 = k \vec{r}_2 \therefore \vec{r}_1 = k (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \\ \therefore \|\vec{r}_1\| &= \|k (\vec{s}_1 - \vec{s}_2)\| \\ \therefore 5\sqrt{2} &= |k| \sqrt{2} \therefore 5 = |k| \\ \therefore k &= \pm 5 \therefore \vec{r}_2 = \pm (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \end{aligned}$$



(٢) فى الشكل المقابل :  
أوجد عزم القوة ٢٠٠ نيوتن  
بالنسبة لنقطة و

الحل

$$\begin{aligned} M_o &= 200 \times 3 \sin 30^\circ = 300 \text{ سم} \\ &= 60 \times 3 \times 30^\circ = 60 \times 3 \times 30^\circ \text{ نيوتن . سم} \end{aligned}$$

$\therefore \vec{r} = (\dots) - (\dots)$  و يكون :

$$\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{s}_1 & \vec{s}_2 & \vec{r} \\ 10 & 0 & 28,98 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \vec{r}_p$$

$$\therefore (\|\vec{r}_p\|) = (\|\vec{s}_1\|) + (\|\vec{s}_2\|) = 10 + 28,98 = 38,98$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{r}_p &= 38,98 \text{ ، } \therefore \vec{r}_p = 38,98 \text{ نيوتن} \\ \therefore 38,98 \times \vec{r} &= 120 \therefore \vec{r} = 3,08 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

## حل رابع

بتحليل القوة  $\vec{r}$  فى اتجاهين متعامدين نجد :  
من هندسة الشكل :

$\vec{r} = (\vec{r}_1) + (\vec{r}_2) + (\vec{r}_3)$  بالتقابل بالرأس  
 $\vec{r} = (\vec{r}_1) + (\vec{r}_2) + (\vec{r}_3)$  متممات لنفس الزاوية  
 $\therefore \vec{r} = (\vec{r}_1) + (\vec{r}_2) + (\vec{r}_3)$   
 $\therefore$  القوة  $\vec{r}$  تميل على أحد الاتجاهين المتعامدين  
بزاوية قياسها  $60^\circ$

$\therefore$  من  $\triangle BCD$  :

$$CD = 3 \text{ سم} \text{ ، } \angle C = 30^\circ \therefore BD = 10 \text{ سم}$$

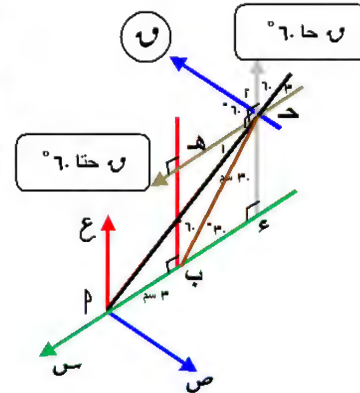
$$BE = 3 \text{ سم} \text{ ، } \angle E = 30^\circ \therefore DE = 10,98 \text{ سم}$$

$$PE = DE + BE = 10,98 + 3 = 13,98 \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{r}_p = \vec{r} \cos 60^\circ + \vec{r}_1 \sin 60^\circ + \vec{r}_2 \sin 60^\circ$$

$$= 13,98 \times \cos 60^\circ + 10 \times \sin 60^\circ + 3 \times \sin 60^\circ = 38,98$$

$$\therefore \vec{r}_p = 38,98 \text{ ، } \therefore \vec{r}_p = 38,98 \text{ نيوتن} \therefore \vec{r} = 3,08 \text{ نيوتن}$$



## السؤال الخامس :

(١) فى الشكل المقابل :

اوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{P} (8, 0, 6) , \vec{B} (12, 1, 1) ,$$

$$\vec{D} (8, 12, 0) , \vec{E} (0, 12, 6) ,$$

$$\therefore \vec{PB} = (8, 12, 6) - (0, 12, 0) =$$

$$(8, 0, 6)$$

$$(0, 12, 0) =$$

$$\therefore \|\vec{PB}\| = 12$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = \frac{(8, 0, 6)}{12}$$

$$= \left( \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2} \right) \times 10 =$$

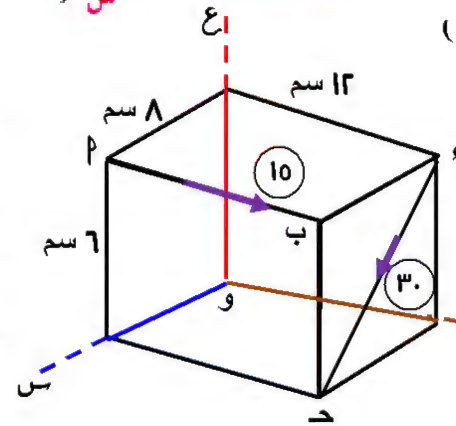
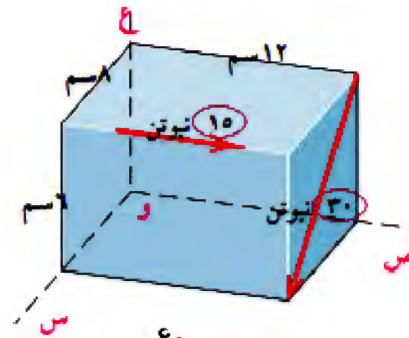
$$(0, 10, 0) =$$

$$\vec{E} = (8, 0, 6) - (0, 12, 0) = (8, -12, 6)$$

$$\therefore \|\vec{E}\| = 14$$

$$\vec{P} = \frac{\vec{E}}{\|\vec{E}\|} = \frac{(8, -12, 6)}{14}$$

$$= \left( \frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7} \right) \times 30 =$$



$$\therefore \vec{M}_O = \vec{P} \times \vec{r}_{OP} + \vec{E} \times \vec{r}_{OE}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 0 & 6 \\ 0 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -96\vec{i} + 48\vec{j} - 96\vec{k} - 96\vec{i} + 48\vec{j} - 96\vec{k} =$$

$$= -192\vec{i} + 96\vec{j} - 192\vec{k}$$

## الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٣) أثرت قوة  $\vec{Q} = Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$  فى نقطة  $P$  متجهموضعها بالنسبة للنقطة الأصل هو  $\vec{r}_{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فإن مركبة عزم  $\vec{Q}$  حول محور  $z$  هى .....

$$(a) Q_x\vec{i} - Q_y\vec{j} \quad (b) Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$$

$$(c) Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} - Q_z\vec{k} \quad (d) Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$$

الحل

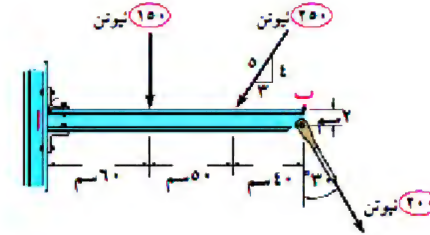
$$Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + Q_z\vec{k}$$

أحمد الشنتوي

## السؤال الثانى :

(٢) فى الشكل المقابل :

ثلاث قوى مستوية تؤثر فى القضيب  $P$  ب اوجد القياسات الجبرية لمجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين  $P$  ،  $B$



## الحل

$$ع \quad 110 \times \theta = 200 \times 6 - 100 \times 12$$

$$100 \times 3 = 200 \times 6 - 110 \times \theta$$

$$200 \times 6 - 110 \times \theta = 300$$

$$110 \times \frac{4}{5} \times 200 - 9000 =$$

$$100 \times \frac{3}{4} \times 200 -$$

$$200 \times \frac{1}{4} \times 200 +$$

$$= 3000 - 3000 = 0 \text{ نيوتن . سم}$$

$$ع \quad 200 \times 6 + 100 \times 12 - 200 \times 3 = 0$$

$$200 \times \frac{1}{4} \times 200 + 100 \times \frac{4}{5} \times 200 - 9000 =$$

$$= 2100 \text{ نيوتن . سم}$$

## السؤال الخامس :

(٢) فى الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها  $20\sqrt{2}$  نيوتن فى نقطة  $P$  اوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة  $O$

## الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$P(1, 0, 0) , B(0, 8, 6)$$

$$\therefore \vec{PB} = (0, 8, 6) - (1, 0, 0) = (-1, 8, 6)$$

$$= (-1, 8, 6)$$

$$\therefore \|\vec{PB}\| = \sqrt{1 + 64 + 36} = \sqrt{101}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = \frac{(-1, 8, 6)}{\sqrt{101}}$$

$$= \frac{(-1, 8, 6)}{\sqrt{101}} \times 20\sqrt{2} =$$

$$= (-2\sqrt{2}, 16\sqrt{2}, 12\sqrt{2})$$

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{w} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \vec{e} \times \vec{v} = \vec{w} \therefore 10\vec{v} + 20\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{w} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \vec{e} \times \vec{v} = \vec{w} \therefore 10\vec{v} + 20\vec{w} =$$



## الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٢) إذا اثرت القوة  $\vec{Q}$  =  $\vec{S} - \vec{V} + \vec{O}$  فى النقطة  $P$  متجه موضعها  $\vec{S} - \vec{V}$  فإن عزم  $\vec{Q}$  بالنسبة للنقطة  $B$  متجه موضعها  $\vec{V} + \vec{S}$  يساوى ....

الحل

$$\vec{P} = (3, 1, 0) - (3, 0, 1) = (0, 1, -1)$$

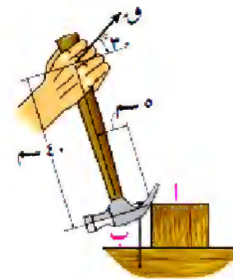
$$\vec{Q} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{S} & \vec{V} & \vec{O} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{Q} \times \vec{P} = \vec{Q}$$

السؤال الثانى :

(٢) الشكل المقابل :

يوضح القوة  $\vec{Q}$  اللازمة لنزع مسمار عند  $B$  ، إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة  $P$  اللازمة لنزع المسمار يساوى ٢٠٠ نيوتن . سم اوجد معيار القوة  $\vec{Q}$

الحل



$$\begin{aligned} \therefore \vec{Q} &= \vec{Q} \text{ حقا } 3. \times 0 + \vec{Q} \text{ حا } 3. \times 0 \\ \therefore 0 &= 200 \times \frac{1}{3} \times \vec{Q} + 200 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \vec{Q} \\ \therefore 0 &= 200 (0 + \sqrt{3} \times 200) \\ \text{ومنها : } \vec{Q} &= 0,4 \text{ نيوتن} \end{aligned}$$

السؤال الخامس :

(٢) قوتان  $\vec{Q}_1 = \vec{S} - \vec{V}$  ،  $\vec{Q}_2 = \vec{S} - \vec{V}$  تؤثران فى النقطتين  $P(1, 1)$  ،  $B(4, 0)$  على الترتيب اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحل

$$\begin{aligned} \therefore \vec{Q}_1 &= (1, 2) = \vec{Q}_2 \text{ ، } (1, 2) = \vec{Q}_1 \\ \therefore \vec{Q}_1 &\parallel \vec{Q}_2 \text{ و تضادها فى الاتجاه ، } \parallel \vec{Q}_1 \parallel = \parallel \vec{Q}_2 \parallel \end{aligned}$$

∴ المجموعة تكون ازدواج

$$\vec{Q}_1 \times \vec{P} + \vec{Q}_2 \times \vec{B} = \vec{Q}_3$$

$$(1, 2) \times (1, 1) + (1, 2) \times (4, 0) = \vec{Q}_3$$

محمد بن عبد الله بن عبد الوهاب

أحمد الشنتوي

# المتميز

في

## الرياضيات التطبيقية الأسنانیکا

الجزء النظري

و

حلول التمارين  
الوحدة الثالثة

|| ق ||

( سيم ، صيم )

ع

أحمد

الصف الثالث الثانوي  
القسم العلمي  
شعبة الرياضيات

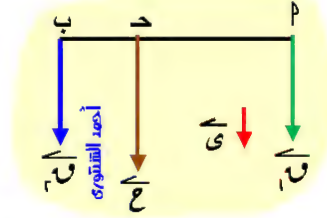
إعداد : أحمد الشننوري

## الوحدة الثالثة .... القوى المتوازية المستوية

## ٣ - ١ محصلة القوى المتوازية المستوية

أولاً : محصلة قوتين متوازيتين و متحدتي الاتجاه :  
قاعدة :

محصلة قوتين متوازيتين و متحدتي الاتجاه هي قوة في اتجاههما و معيارها يساوى مجموع معيارى القوتين و يقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما  
ففى الشكل المقابل :



$\vec{P}$  ،  $\vec{Q}$  قوتان متوازيتان فى نفس

الاتجاه تؤثران فى النقطتين P ، B على الترتيب من جسم متماسك فإن :

$$\vec{P} = \vec{Q} \cdot \vec{R} \quad , \quad \vec{Q} = \vec{P} \cdot \vec{R}$$

$$\vec{R} = (\vec{P} + \vec{Q}) \cdot \vec{C}$$

حيث :  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين ،  $\vec{R}$  محصلة القوتين و تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلى :

$$(1) \text{ مقدار المحصلة : } \vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$(2) \text{ اتجاه المحصلة : هو نفس اتجاه القوتين}$$

$$(3) \text{ نقطة تأثير المحصلة : هي نقطة } \vec{C} \in \overline{AB} \text{ و تقسمها من}$$

$$\text{الداخل بحيث : } \vec{P} \times \vec{C} = \vec{Q} \times \vec{B}$$

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٤٦

قوتان متوازيتان تعملان فى نفس الاتجاه مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين P ، B حيث P = ٢٥ سم أوجد محصلة القوتين

الحل

نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$\therefore \vec{P} = 4 \cdot \vec{C} \quad , \quad \vec{Q} = 6 \cdot \vec{C}$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = 10 \cdot \vec{C}$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $\vec{C} \in \overline{AB}$

$$\therefore \vec{P} \times \vec{C} = \vec{Q} \times \vec{B} \quad \therefore 4 \times \vec{C} = 6 \times \vec{B} \quad \therefore (25 - \vec{C}) \times 4 = 6 \times \vec{C}$$

$$\therefore 100 - 4\vec{C} = 6\vec{C} \quad \therefore 100 = 10\vec{C} \quad \therefore \vec{C} = 10 \text{ سم}$$

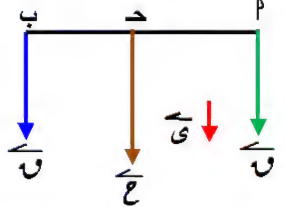
$\therefore$  مقدار المحصلة :  $\vec{R} = 10$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين

و تؤثر فى نقطة تبعد عن P بمقدار ١٥ سم

## إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٦

إذا كانت القوتان متساويتان فأين تقع نقطة تأثير المحصلة

الحل



بفرض أن : مقدار كل من القوتين =  $\vec{Q}$

$\therefore$  مقدار المحصلة :  $\vec{R} = 2\vec{Q}$  ويكون :

$$\vec{P} \times \vec{C} = \vec{Q} \times \vec{B} \quad \therefore \vec{Q} \times \vec{C} = \vec{Q} \times \vec{B}$$

$$\therefore \vec{C} = \vec{B} \quad \therefore \text{أى أن : } \vec{C} \text{ منتصف } \overline{AB}$$

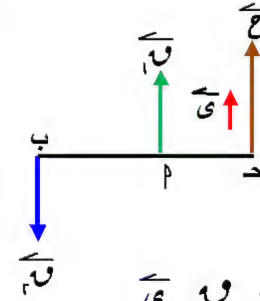
$\therefore$  إذا كانت القوتان متساويتان فإن نقطة تأثير المحصلة تقع فى منتصف المسافة بين خطى عمل القوتين

أولاً : محصلة قوتين متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه :  
قاعدة :

محصلة قوتين متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه و غير متساويتين فى المقدار هي قوة فى اتجاه القوة الأكبر معياراً و معيارها يساوى الفرق بين معيارى القوتين و يقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما



ففى الشكل المقابل :  
 $\vec{P}_1$  ،  $\vec{P}_2$  قوتان متوازيتان و غير متساويتان  
 و تعملان فى اتجاهين متضادين تؤثران فى  
 النقطتين  $P$  ،  $B$  على الترتيب من جسم  
 متماسك فإذا كان  $\vec{P}_1 < \vec{P}_2$  فإن :



$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2 - \vec{R} \quad \text{و} \quad \vec{P}_1 - \vec{P}_2 = -\vec{R} \quad \therefore \vec{R} = (\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$$

حيث :  $\vec{R}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الأكبر معياراً و هى  $\vec{P}_2$  ،  
 $\vec{R}$  محصلة القوتين

و تتعين المحصلة تعيناً تاماً كما يلى :

(١) مقدار المحصلة :  $\vec{R} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$

(٢) اتجاه المحصلة : هو نفس اتجاه القوة الأكبر معياراً  $\vec{P}_2$

(٣) نقطة تأثير المحصلة : هى نقطة  $D$  التى  $\vec{P}_1$  تقسم من الخارج

بحيث :  $\vec{P}_1 \times \vec{P}_2 = \vec{P}_1 \times \vec{R}$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٤٧

أوجد محصلة قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدارهما  
 $12$  ،  $7$  نيوتن تؤثران فى نقطتين  $P$  ،  $B$  حيث  $PB = 20$  سم

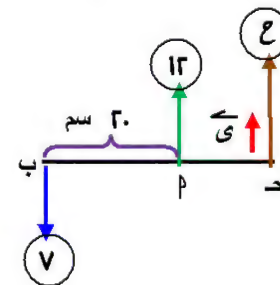
الحل

نفرض  $\vec{R}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$$\therefore \vec{P}_1 = 12\vec{R} \quad \text{و} \quad \vec{P}_2 = 7\vec{R}$$

$$\vec{R} = 12\vec{R} - 7\vec{R} = 5\vec{R}$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $D \Rightarrow \vec{P}_1$



$$\therefore 12 \times P = 7 \times V \quad \therefore 12 \times 20 = 7 \times V$$

$$\therefore 240 = 7V \quad \therefore V = \frac{240}{7} \approx 34.3 \text{ سم}$$

مقدار المحصلة :  $R = 5$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة  $12$  نيوتن  
 و تؤثر فى نقطة  $D \Rightarrow \vec{P}_1$  و تقع خارج  $PB$  و تبعد عن  $P$  بمقدار  $24$  سم

إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٧

ماذا تقول عن محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين و متضادتين  
 فى الاتجاه

الحل

محصلة قوتين متساويتين و متوازيتين و متضادتين فى الاتجاه

هى المتجه الصفري " يكونان ما يسمى بالازدواج كما سيأتى لاحقاً "

تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى و المحصلة :

إذا علمت إحدى قوتين متوازيتين  $\vec{P}_1$  و علمت المحصلة  $\vec{R}$  فإن :  
 لتعيين القوة الثانية  $\vec{P}_2$  يراعى ما يلى :

[١] نفرض  $\vec{R}$  متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

[٢] يتعين مقدار و اتجاه  $\vec{P}_2$  من العلاقة :  $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{R}$

[٣] نقطة تأثير  $\vec{P}_2$  ( و لتكن  $D$  مثلاً ) تتعين من العلاقة :

مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة  $D = 0$  عزم المحصلة  
 بالنسبة لنقطة  $D = 0$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٤٨

قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما  $30$  نيوتن و مقدار إحدى القوتين

$50$  نيوتن و تعمل على بعد  $01$  سم من المحصلة ، أوجد القوة الثانية

و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة

تعملان : أولاً : فى اتجاه واحد ثانياً : فى اتجاهين متضادين

## الحل

نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه المحصلة  
 $\therefore \vec{C} = \frac{30}{50} \vec{i} = \frac{3}{5} \vec{i}$  ،  $\vec{C} = \frac{0}{50} \vec{j} = 0 \vec{j}$

أولاً :  $\vec{C}$  ،  $\vec{C}$  فى اتجاه واحد

$$\therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} + 0 \vec{j} = \frac{3}{5} \vec{i} \quad \therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} + 0 \vec{j} = \frac{3}{5} \vec{i}$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} = 10 \vec{j}$$

أى أن :  $\vec{C}$  مقدارها 10 نيوتن و اتجاهها مضاد لاتجاه المحصلة

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة د = عزم المحصلة حول نقطة د = .

$$\therefore 10 \times \text{ب} \times \text{د} - 0 \times 01 = 0 \quad \therefore \text{ب} \times \text{د} = 01 \quad \therefore \text{ب} = 17 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ب} = 17 \text{ سم} = 01 - 17 = 119 \text{ سم} \quad \text{أى أن البعد القوتين} = 119 \text{ سم}$$

ثانياً :  $\vec{C}$  ،  $\vec{C}$  فى اتجاهين متضادين

$$\therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} + 0 \vec{j} = \frac{3}{5} \vec{i}$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} + 0 \vec{j} = \frac{3}{5} \vec{i}$$

$$\therefore \vec{C} = \frac{3}{5} \vec{i} = 80 \vec{j}$$

أى أن :  $\vec{C}$  مقدارها 80 نيوتن و اتجاهها نفس

اتجاه المحصلة

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة د = عزم المحصلة حول نقطة د = .

$$\therefore 80 \times \text{ب} \times \text{د} - 01 \times 0 = 0 \quad \therefore \text{ب} \times \text{د} = 01 \quad \therefore \text{ب} = 3 \text{ سم}$$

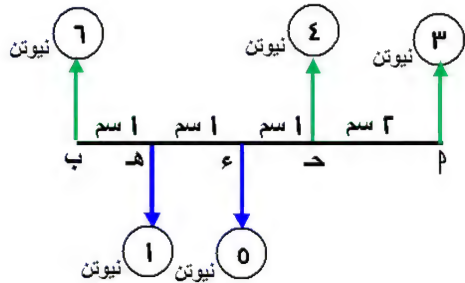
$$\therefore \text{ب} = 3 \text{ سم} = 01 - 3 = 21 \text{ سم} \quad \text{أى أن البعد القوتين} = 21 \text{ سم}$$

عزوم القوى المتوازية المستوية :

نظرية :

مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة  
 لنقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٤٩



الشكل المقابل يمثل مجموعة من  
 القوى المتوازية على  $\vec{P}$  أوجد  
 القياس الجبرى لمجموع عزوم هذه  
 القوى بالنسبة : نقطة  $\vec{P}$

(ب) نقطة منتصف  $\vec{P}$

الحل

(ب) القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة  $\vec{P}$  =

$$= 0 \times 6 - 1 \times 4 - 2 \times 3 + 1 \times 1 = 19 \text{ نيوتن . سم}$$

(ب) القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة منتصف  $\vec{P}$  =

$$= 2,0 \times 6 - 1,0 \times 1 + 0,0 \times 0 + 0,0 \times 4 + 2,0 \times 3$$

$$= 1,0 \text{ نيوتن . سم}$$

محصول عدة قوى متوازية مستوية :

إذا كانت :  $\vec{C}_1$  ،  $\vec{C}_2$  ،  $\vec{C}_3$  ، .... ،  $\vec{C}_n$  عدة قوى متوازية

مستوية تؤثر فى النقط  $\vec{P}_1$  ،  $\vec{P}_2$  ،  $\vec{P}_3$  ، .... ،  $\vec{P}_n$  فإن :

(١) مقدار و اتجاه المحصلة يتعين من العلاقة :

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{C}_3 + \dots + \vec{C}_n$$

و ذلك بفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه إحدى القوى

(٢) نقطة تأثير المحصلة و لتكن ( د مثلاً ) : تتعين من العلاقة :

مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة د = عزم المحصلة

بالنسبة لنقطة د حيث :  $\vec{C} = \frac{\text{مجموع عزوم القوى حول } \vec{P}}{\text{عزم المحصلة حول } \vec{P}}$

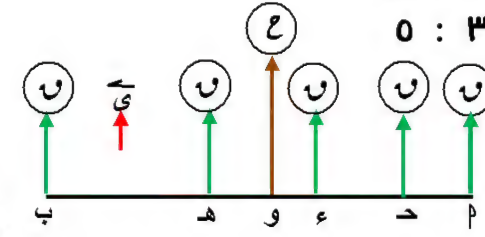
مع مراعاة اتجاه دوران عزم المحصلة بالنسبة لاتجاه دوران

عقارب الساعة

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٥٠

إذا كانت د ، ع ، هـ  $\Rightarrow \overline{M} \Rightarrow$  بحيث  $M : د : ع : هـ : هـ : هـ$  ب  
 $= ١ : ٣ : ٥ : ٧$  أثرت قوى متوازية و في نفس الاتجاه و متساوية  
 في المقدار في النقط م ، د ، ع ، هـ ، ب  
 برهن أن المحصلة تقسم  $\overline{M}$  بنسبة ٣ : ٥

الحل



بفرض أن :  $M : د = س$  ،  
 $د = ع = ٣ س$  ،  $ع = هـ = ٥ س$  ،  
 $هـ = ب = ٧ س$  ،  $\overline{R}$  متجه وحدة في  
 اتجاه القوى ، و أن مقدار كل قوة تؤثر في النقط م ، د ، ع ، هـ ، ب يساوى  
 وحدة قوة  $\therefore \overline{R} = ٥ س$

أى أن : مقدار المحصلة ٥ س وحدة قوة و تعمل في نفس اتجاه القوى  
 و بفرض أن : المحصلة تعمل في نقطة و  $\overline{M} \Rightarrow$   
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = عزم المحصلة حول نقطة ب  
 $\therefore$  عزم المحصلة حول نقطة ب =  $١٠ س + ٣٠ س + ٥٠ س + ٧٠ س + ٩٠ س$

$$١٢ س + ٧ س = ٥٠ س$$

$\therefore$  المحصلة تعمل على الدوران حول ب في اتجاه عكس دوران عقارب الساعة

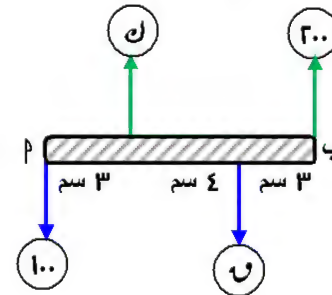
أى أن : و  $\overline{M} \Rightarrow$  ،  $٥ س = ١٠ س + ٣٠ س + ٥٠ س + ٧٠ س + ٩٠ س$

و منها : ب و = ١٠ س  $\therefore$  م و = ٦ س

$\therefore$  م و : ب و = ٣ : ٥ أى أن : المحصلة تقسم  $\overline{M}$  بنسبة ٣ : ٥

## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٥٠

الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف  $\overline{M}$   
 أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل  
 فإذا كانت المحصلة ٣٠ نيوتن و تعمل لأعلى



و تؤثر في نقطة على القضيب تبعد ٤ متر  
 من م أوجد و ، ل

الحل

بفرض  $\overline{R}$  متجه وحدة في اتجاه المحصلة كما  
 بالشكل المقابل ،  $\therefore ع = ٣٠$  نيوتن

$$\therefore ٣٠ = ١٠ + ٣٠ + ٥٠ + ٧٠ + ٩٠$$

و منها : ل = ٢٠ ، (١)

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة م =

عزم المحصلة حول نقطة م

$$\therefore ٤ \times ٣٠ = ٣ \times ١٠ + ٧ \times ٣٠ - ١٠ \times ٢٠$$

$$\therefore ١٢٠ = ٣٠ - ٧٠$$

بضرب (١)  $\times ٣$  وجمعها مع (٢) ينتج :  $١٤٠ = ٤٠$   $\therefore ٣٥٠$  نيوتن

بالتعويض في (١) ينتج : ل = ٥٥ نيوتن

## إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٥١

قوتان متوازيتان و في نفس الاتجاه مقدارهما و ، ٢ و تؤثران في  
 نقطتين م ، ب فإذا تحركت القوة ٢ موازية نفسها في اتجاه  $\overline{M}$   
 مسافة س سم ، أثبت أن محصلة القوتين تتحرك في نفس الاتجاه  
 مسافة قدرها  $\frac{٢}{٣} س$

الحل

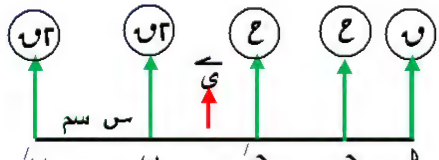
بفرض  $\overline{R}$  متجه وحدة في اتجاه المحصلة  
 كما بالشكل المقابل  $\therefore ع = ٣ س$

$$\therefore ٣ س = ٣ س$$

في الحالة الأولى : نفرض أن : المحصلة

تؤثر عند نقطة د  $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة م =

عزم المحصلة حول نقطة م





$$(r, \Gamma) = \left( \frac{\gamma}{\gamma}, \frac{\xi}{\gamma} \right) = \left( \frac{\gamma \times 1 - \Gamma \times \Psi}{1 - \Psi}, \frac{(1 - \Gamma) \times 1 - 1 \times \Psi}{1 - \Psi} \right) = \rightarrow$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 38$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه

القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن  $P$  بمقدار  $22,0$  سم

$$(د) \quad \vec{U}_1 = \vec{U}_1 \quad \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \quad \vec{U}_3 = \vec{U}_3$$

$$\vec{E} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_3$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $D \Rightarrow \vec{P} \vec{D}$

$$\therefore 16 \times P = 10 \times D$$

$$\therefore 16 \times P = 10 \times (P - 30)$$

$$\therefore 16P = 10P - 300 \quad \therefore 6P = -300 \quad \therefore P = -50 \text{ سم}$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 26$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه

القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن  $P$  بمقدار  $11,04$  سم

(و) إذا كانت  $\vec{U}_1$  ،  $\vec{U}_2$  فى نفس الاتجاه أجب عما يأتى :

(P)  $\vec{U}_1 = 8$  نيوتن ،  $E = 13$  نيوتن ،  $P = 10$  سم

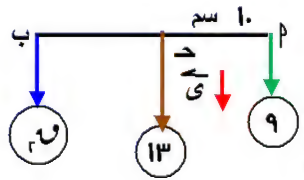
أوجد :  $\vec{U}_2$  ،  $P$

(ب)  $\vec{U}_1 = 6$  نيوتن ،  $P = 24$  سم ،  $P = 56$  سم

أوجد :  $\vec{U}_2$  ،  $E$

(د)  $\vec{U}_1 = 6$  نيوتن ،  $P = 9$  سم ،  $D = 8$  سم

أوجد :  $\vec{U}_2$  ،  $E$



بفرض  $\vec{U}_1$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$(P) \quad \vec{U}_1 = \vec{U}_1 \quad \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \quad \vec{U}_3 = \vec{U}_3$$

$$\vec{E} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_3$$

$$\therefore 13 = 8 + \vec{U}_2 \quad \therefore \vec{U}_2 = 5$$

أى أن :  $\vec{U}_2 = 5$  نيوتن

أجب عن الأسئلة الآتية :

فى التمارين ٤ - ٦ قوتان  $\vec{U}_1$  ،  $\vec{U}_2$  تؤثران فى النقطتين  $P$  ،  $B$

فإذا كانت محصلتهما  $\vec{E}$  تؤثر فى نقطة  $D \Rightarrow \vec{P} \vec{D}$

(٤) أوجد مقدار و اتجاه المحصلة و طول  $\vec{P} \vec{D}$  فى كل مما يأتى

( القوتان فى نفس الاتجاه )

(P)  $\vec{U}_1 = 9$  نيوتن ،  $\vec{U}_2 = 17$  نيوتن ،  $P = 13$  سم

(ب)  $\vec{U}_1 = 23$  نيوتن ،  $\vec{U}_2 = 10$  نيوتن ،  $P = 57$  سم

(د)  $\vec{U}_1 = 16$  نيوتن ،  $\vec{U}_2 = 10$  نيوتن ،  $P = 30$  سم

الحل

بفرض  $\vec{U}_1$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$(P) \quad \vec{U}_1 = \vec{U}_1 \quad \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \quad \vec{U}_3 = \vec{U}_3$$

$$\vec{E} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_3$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $D \Rightarrow \vec{P} \vec{D}$

$$\therefore 17 \times P = 9 \times D$$

$$\therefore 17 \times P = 9 \times (P - 13)$$

$$\therefore 17P = 9P - 117 \quad \therefore 8P = -117 \quad \therefore P = -14,625 \text{ سم}$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 26$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه

القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن  $P$  بمقدار  $8,0$  سم

(ب)  $\vec{U}_1 = 23$  نيوتن ،  $\vec{U}_2 = 10$  نيوتن ،  $P = 57$  سم

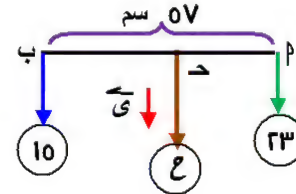
$$\vec{E} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U}_3$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $D \Rightarrow \vec{P} \vec{D}$

$$\therefore 23 \times P = 10 \times D$$

$$\therefore 23 \times P = 10 \times (P - 57)$$

$$\therefore 23P = 10P - 570 \quad \therefore 13P = -570 \quad \therefore P = -43,846 \text{ سم}$$



أى أن :  $U = 30$  نيوتن و تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

و منها :  $U = 30$  سم  $U = 30$  سم

$U = 30$  سم

$$80 \times 6 = 24 \times U \quad (ب)$$

و منها :  $U = 20$  نيوتن ،  $U < U$  ،

$U$  تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

$$U = 20 \quad U = 1 - 6 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14$$

$$U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14$$

$$9 \times 6 = 8 \times U \quad (د)$$

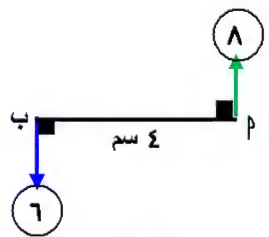
و منها :  $U = 1,70$  نيوتن ،  $U < U$  ،

$U$  تعمل فى نفس اتجاه المحصلة

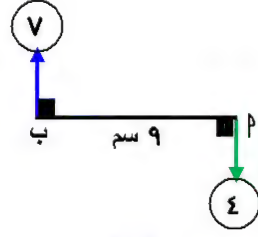
$$U = 1,70 \quad U = 1 - 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70$$

$$U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70$$

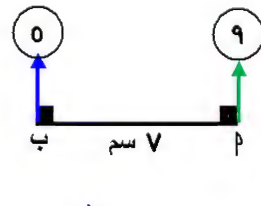
(٧) فى كل مما يأتى أوجد مقدار و اتجاه المحصلة و بعد نقطة تأثيرها عن نقطة  $P$



(د)



(ب)



(پ)

الحل

$$8 \times 10 = 1 \times 0 \quad (ب) \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1$$

$$01 \times 1 = 24 \times U \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14 \quad U = 14$$

و منها :  $U = 14$  نيوتن

$$U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20$$

$$U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1$$

$$U \times 8 = 9 \times 1 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70 \quad U = 1,70$$

و منها :  $U = 1,70$  نيوتن

$$U = 12,70 \quad U = 12,70 \quad U = 12,70 \quad U = 12,70 \quad U = 12,70 \quad U = 12,70$$

(٦) إذا كانت  $U$  ،  $U$  متضادتان فى الاتجاه أجب عما يأتى :

(پ)  $U = 10$  نيوتن ،  $U = 20$  نيوتن ،  $U = 70$  سم

أوجد :  $U$  ،  $U$

(ب)  $U = 6$  نيوتن ،  $U = 24$  سم ،  $U \neq U$

$U = 01$  سم أوجد :  $U$  ،  $U$

(د)  $U = 6$  نيوتن ،  $U = 9$  سم ،  $U \neq U$

$U = 8$  سم أوجد :  $U$  ،  $U$

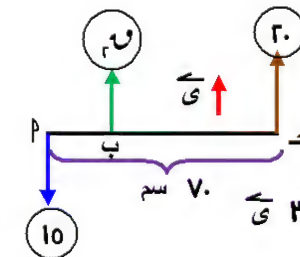
الحل

بفرض  $U$  متجه وحدة فى اتجاه المحصلة

$$U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1 \quad U = 1$$

$$U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20 \quad U = 20$$

$$U = 30 \quad U = 30 \quad U = 30 \quad U = 30 \quad U = 30 \quad U = 30$$

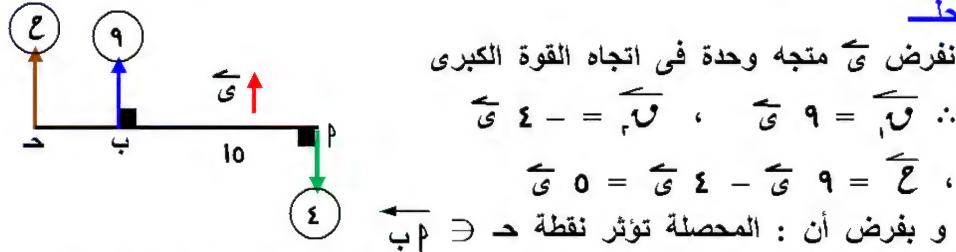




∴ مقدار المحصلة :  $E = 2$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٨ نيوتن  
و تؤثر فى نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$  و تقع خارج  $\overrightarrow{P}$  و تبعد عن  $P$  بمقدار ١٢ سم

(٨) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدارهما ٤ ، ٩ نيوتن  
تؤثران فى النقطتين  $P$  ، حيث  $P = 10$  سم أوجد محصلتهما

الحل



نفرض  $\vec{E}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$$\therefore \vec{P} = \vec{9} = \vec{E}, \quad \vec{P} = -\vec{4} = -\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{9} - \vec{4} = \vec{5}$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$

$$\therefore \vec{P} \times 9 = \vec{P} \times 4 \quad \therefore (10 - \vec{P}) \times 9 = \vec{P} \times 4$$

$$\therefore 135 - \vec{P} \times 9 = \vec{P} \times 4 \quad \therefore 135 = \vec{P} \times 13 \quad \therefore \vec{P} = 10.38 \text{ سم}$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 5$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٩ نيوتن

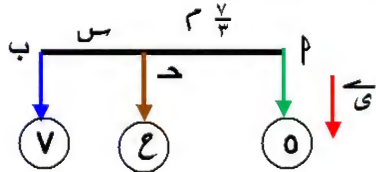
و تؤثر فى نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$  و تقع خارج  $\overrightarrow{P}$  و تبعد عن  $P$  بمقدار ٢٧ سم

(٩) إذا كانت محصلة القوتان المتوازيتان  $V$  ،  $0$  نيوتن تؤثر فى

نقطة تبعد  $\frac{1}{3}$  متر عن خط عمل القوة الصغرى أوجد المسافة بين

خطى عمل القوتين

الحل



∴ القوتان متحدتا الاتجاه ،

و بفرض أن خط عمل المحصلة يبعد

عن خط القوة الكبرى س متر

$$\therefore 0 \times \frac{1}{3} = V \times S \quad \text{و منها : } S = \frac{1}{3} \text{ متر}$$

$$\text{و تكون المسافة بين القوتين} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ متر}$$

(١٠) بفرض  $\vec{E}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$\therefore \vec{P} = \vec{9} = \vec{E}, \quad \vec{P} = \vec{0} = \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{9} + \vec{0} = \vec{9}$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$

$$\therefore \vec{P} \times 9 = \vec{P} \times 0$$

$$\therefore 9 \times \vec{P} = 0 \times \vec{P} \quad \therefore (9 - 7) \times 0 = \vec{P} \times 9$$

$$\therefore 30 = \vec{P} \times 12 \quad \therefore \vec{P} = 2.5 \text{ سم}$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 12$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه

القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن  $P$  بمقدار ٢,٥ سم

(ب) نفرض  $\vec{E}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$$\therefore \vec{P} = \vec{7} = \vec{E}, \quad \vec{P} = -\vec{4} = -\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{7} - \vec{4} = \vec{3}$$

و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$

$$\therefore \vec{P} \times 7 = \vec{P} \times 4 \quad \therefore (9 - \vec{P}) \times 7 = \vec{P} \times 4$$

$$\therefore 63 - \vec{P} \times 7 = \vec{P} \times 4 \quad \therefore 63 = \vec{P} \times 11 \quad \therefore \vec{P} = 5.73 \text{ سم}$$

∴ مقدار المحصلة :  $E = 3$  نيوتن ، و يعمل اتجاهها فى اتجاه القوة ٧ نيوتن

و تؤثر فى نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$  و تقع خارج  $\overrightarrow{P}$  و تبعد عن  $P$  بمقدار ٢١ سم

(د) نفرض  $\vec{E}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى

$$\therefore \vec{P} = \vec{8} = \vec{E}, \quad \vec{P} = -\vec{6} = -\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{8} - \vec{6} = \vec{2}$$

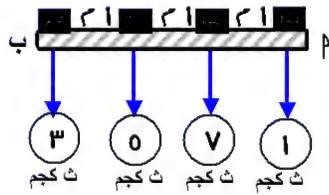
و بفرض أن : المحصلة تؤثر نقطة  $\Rightarrow$  ب  $\overrightarrow{P}$

$$\therefore \vec{P} \times 8 = \vec{P} \times 6$$

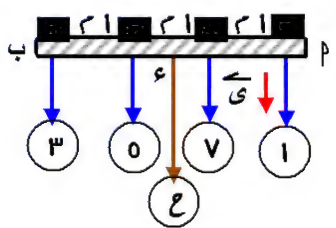
$$\therefore 8 \times \vec{P} = 6 \times \vec{P} \quad \therefore (\vec{P} + 4) \times 6 = \vec{P} \times 8$$

$$\therefore 24 = \vec{P} \times 12 \quad \therefore \vec{P} = 2 \text{ سم}$$

و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة  $P \Rightarrow \overrightarrow{HP}$   
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P$  = عزم المحصلة حول نقطة  $P$   
 $\therefore$  عزم المحصلة حول نقطة  $P = 28 \times 4.0 + 18 \times 0.0 - 1.0 \times 3.0 - 2 \times 8.0 = 24.0$   
 $= 24.0$   $\therefore$  المحصلة حول نقطة  $P$  فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة  
 أى أن :  $P \Rightarrow \overrightarrow{HP}$   $\therefore 24.0 = 2P \times 2.0$  ومنها :  $2P = 12$  سم  
 $\therefore 24.0$  خط عمل المحصلة يمر بنقطة  $P \Rightarrow \overrightarrow{HP}$  ،  $P \Rightarrow \overrightarrow{HP}$  ،  $P \Rightarrow \overrightarrow{HP}$  ، بحيث :  $2P = 12$  سم



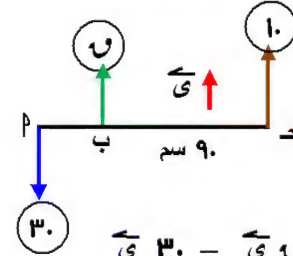
(١٢) فى الشكل المقابل : وضعت أربعة أثقال مقدارها ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١ ث كجم على قضيب خفيف كما بالشكل ، عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً



نفرض  $\overrightarrow{E}$  متجه وحدة رأسياً لأعلى  
 $\therefore \overrightarrow{E} = \overrightarrow{E} (3 + 0 + 7 + 1) = 16 \overrightarrow{E}$   
 $\therefore \overrightarrow{E} = 16$  ث كجم  
 أى أن مقدار المحصلة ١٦ ث كجم و تؤثر لأسفل  
 بفرض أن :  $E$  تؤثر عند نقطة  $E$  على القضيب  
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P$   
 = عزم المحصلة حول نقطة  $P$

$\therefore$  عزم المحصلة حول نقطة  $P = 3 \times 3 + 2 \times 0 + 1 \times 7 = 26$   
 $\therefore$  المحصلة تعمل حول نقطة  $P$  فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة  
 $\therefore \overrightarrow{EP} \Rightarrow \overrightarrow{EP} \times 16 = 26 \therefore \overrightarrow{EP} \Rightarrow \overrightarrow{EP} = 1.625$  سم  
 أى أن : المحصلة تؤثر فى نقطة  $E \Rightarrow \overrightarrow{EP}$  و تبعد ١,٦٢٥ سم عن نقطة  $P$

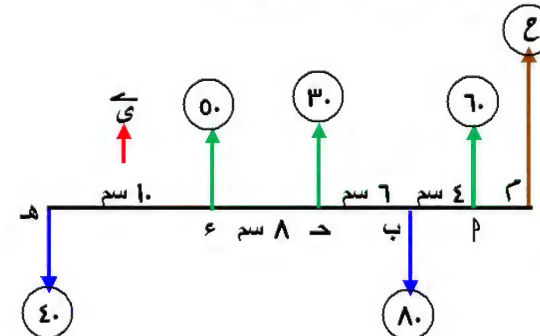
(١٠) قوتان متوازيتان صغراهما ٣ نيوتن و تؤثر فى الطرف  $P$  من قضيب خفيف  $\overline{AB}$  و الكبرى تؤثر فى الطرف  $B$  فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ، و يبعد خط عملها عن الطرف  $B$  بمقدار ٩ سم ، فما طول القضيب



الحل  
 بفرض  $\overrightarrow{E}$  متجه وحدة فى اتجاه المحصلة  
 و مقدار القوة الكبرى = ٩ نيوتن  
 $\therefore$  مقدار المحصلة أقل من القوة الصغرى  
 $\therefore$  القوتان فى اتجاهين متضادين  
 و منها :  $9 = 10 - 3$   
 $\therefore 9 \times 4.0 = 10 \times 3.0$   
 $\therefore 36.0 = 30.0$   
 $\therefore 12.0 = 10 \times 3.0$   
 $\therefore 12.0 = 10 \times 3.0$   
 $\therefore 12.0 = 10 \times 3.0$

(١١)  $P, B, D, E, H$  نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث :

$P = B = 4$  سم ،  $B = D = 6$  سم ،  $D = E = 8$  سم ،  $E = H = 10$  سم  
 أثرت خمس قوى مقاديرها ٦ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ٤ ث كجم فى النقاط  $P, D, E, B, H$  على الترتيب و فى اتجاه عمودى على  $\overline{PH}$  بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه و القوتان الاخرتان فى الاتجاه المضاد ، عين محصلة المجموعة



الحل  
 نفرض  $\overrightarrow{E}$  متجه وحدة فى اتجاه القوى الثلاث الأولى  
 $\therefore \overrightarrow{E} = \overrightarrow{E} (6 + 3 + 5 - 8 - 4) = 2 \overrightarrow{E}$   
 أى أن مقدار المحصلة ٢ ث كجم فى اتجاه القوى الثلاث الأولى

(١٤)  $P$  ،  $B$  ،  $D$  ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقى بحيث :  $PB = 1$  متر

$PB = 3$  متر ،  $B \Rightarrow D$  ، أثرت القوى ٢ ،  $\frac{1}{2}$  نيوتن رأسياً لأسفل فى النقطتين  $P$  ،  $D$  على الترتيب ، كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن فى النقطة  $B$  رأسياً لأعلى ، أوجد مقدار واتجاه المحصلة و بعد نقطة تأثيرها عن نقطة  $P$

الحل

نفرض  $\vec{U}$  متجه وحدة رأسياً لأعلى

$$\vec{R} = \vec{U} ( 2 - \frac{1}{2} - 4 ) = -\frac{5}{2} \vec{U}$$

$$\therefore R = \frac{5}{2} \text{ نيوتن}$$

أى أن مقدار المحصلة  $\frac{5}{2}$  نيوتن و تؤثر لأعلى

و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة  $E \Rightarrow D \Rightarrow$

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P$

$$= \text{عزم المحصلة حول نقطة } P$$

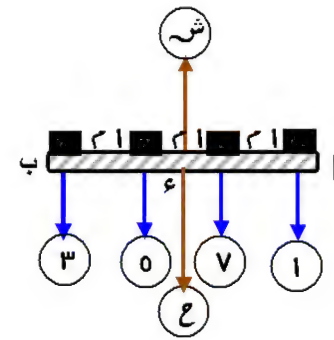
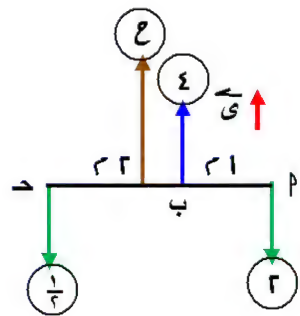
$$\therefore \text{عزم المحصلة حول نقطة } P =$$

$$- \frac{5}{2} = 3 \times \frac{1}{2} + 1 \times 4$$

$\therefore$  المحصلة تعمل حول نقطة  $P$  فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة

$$\therefore \overline{PE} = 3 \times \frac{1}{2} - 4 = -\frac{5}{2} \text{ ومنها : } PE = \frac{5}{2} \text{ م}$$

أى أن : المحصلة تؤثر فى نقطة  $E \Rightarrow D$  و تبعد  $\frac{5}{2}$  م عن نقطة  $P$



$\therefore$  الشد فى الخيط ( شـ ) الذى يعلق منه القضيب يساوى فى المقدار محصلة القوى

( عـ ) و يضادها فى الاتجاه

$\therefore$  شـ = ١٦ ث كجم و يؤثر فى نقطة

$E \Rightarrow B \Rightarrow$  و تبعد ١,٦٢٥ سم عن نقطة  $P$

كما بالشكل المقابل

أى : يجب أن يعلق القضيب من نقطة

تبعد ١,٦٢٥ سم من طرفه  $P$  ليظل أفقياً

(١٣) قوتان متوازيتان و متحدتا الاتجاه مقدارهما ٨ ، ٥ نيوتن تؤثران

فى النقطتين  $P$  ،  $B$  حيث  $PB = 39$  سم ، إذا اضيف للقوة

الأولى قوة أخرى مقدارها ٧ نيوتن فى نفس الاتجاه فإن المحصلة

تتحرك ٨ وحدات أوجد  $U$

الحل

فى الحالة الأولى : من الشكل المقابل نجد :

$$R = 8 + 5 = 13 \text{ نيوتن}$$

$$8 \times PB = 5 \times PD$$

$$\therefore 8 \times (PD - 39) = 5 \times PD$$

$$\therefore 8PD - 312 = 5PD$$

$$\therefore 3PD = 312$$

$$\therefore PD = 104$$

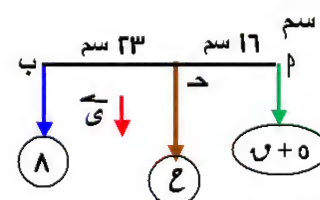
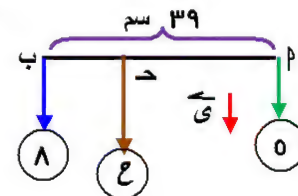
فى الحالة الثانية : المحصلة تتحرك ٨ وحدات

$$\therefore PD = 104 - 8 = 96 \text{ سم ، } PB = 23 \text{ سم}$$

$$\therefore 23 \times 8 = 96 \times (U + 5)$$

$$\therefore 184 = 96U + 480$$

$$\text{ومنها : } U = 7,5 \text{ نيوتن}$$





## ٣ - ٢ ائزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

قاعدة :

إذا أئزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

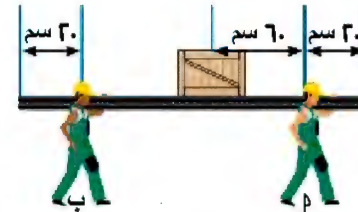
(١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى ( بالنسبة لمتجه وحدة

يوازيها ) يساوى صفراً ( المحصلة = صفر )

(٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى

مستويها يساوى صفراً

## إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٥٦

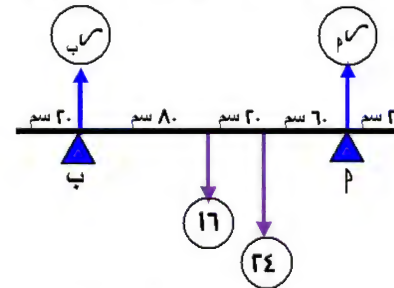


رجلان P ، ب يحملان لوح من الخشب طوله ٢ متر و وزنه ١٦ ث كجم يؤثر

عند منتصفه يحمل صندوقاً ٢٤ ث كجم

كما هو موضح بالشكل المقابل ، أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين على أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين

الحل



أولاً : مجموع القياسات الجبرية للقوى =

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow P + M - 16 - 24 = 0$$

$$\therefore P + M = 40 \quad (1)$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة P =

$$\therefore \sum M_P = 0 \Rightarrow 16 \times 20 + 24 \times 80 - M \times 80 = 0$$

بالتعويض فى (١) ينتج :  $M = 23$  ث كجم

$\therefore$  ض P = ٢٣ ث كجم ، ض M = ١٧ ث كجم

ثانياً : مجموع القياسات الجبرية للقوى =

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow P + M - 16 - 24 = 0$$

$$\therefore P + M = 40 \quad (1)$$

، بفرض أن : الرجل ب يقف على بعد ٢٠ سم من الرجل P

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة P =

$$\therefore \sum M_P = 0 \Rightarrow 16 \times 20 + 24 \times 80 - M \times 80 = 0$$

$$\therefore 16 \times 20 + 24 \times 80 - M \times 80 = 0 \Rightarrow M = 23$$

أى أن : كتف الرجل ب يكون على بعد ١٣٦ سم من كتف الرجل P

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥٦

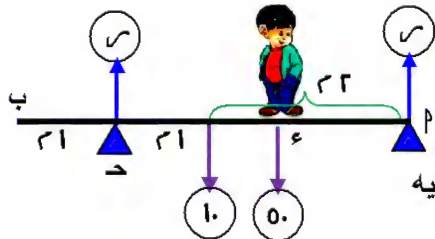
P ب لوح خشبى منتظم كتلته ١٠ كجم و طوله ٤ أمتار يرتكز فى وضع

على حاملين أحدهما عند P والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن B ،

بين على أى بعد يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكى يتساوى

ردى الفعل على الحاملين

الحل



$\therefore$  اللوح منتظم

$\therefore$  وزنه ١٠ ث كجم يؤثر فى منتصفه

، رد الفعل عند كل حامل يساوى الضغط عليه

، مجموع القياسات الجبرية للقوى =

$$\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow B + P - 10 - 50 = 0$$

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة P =

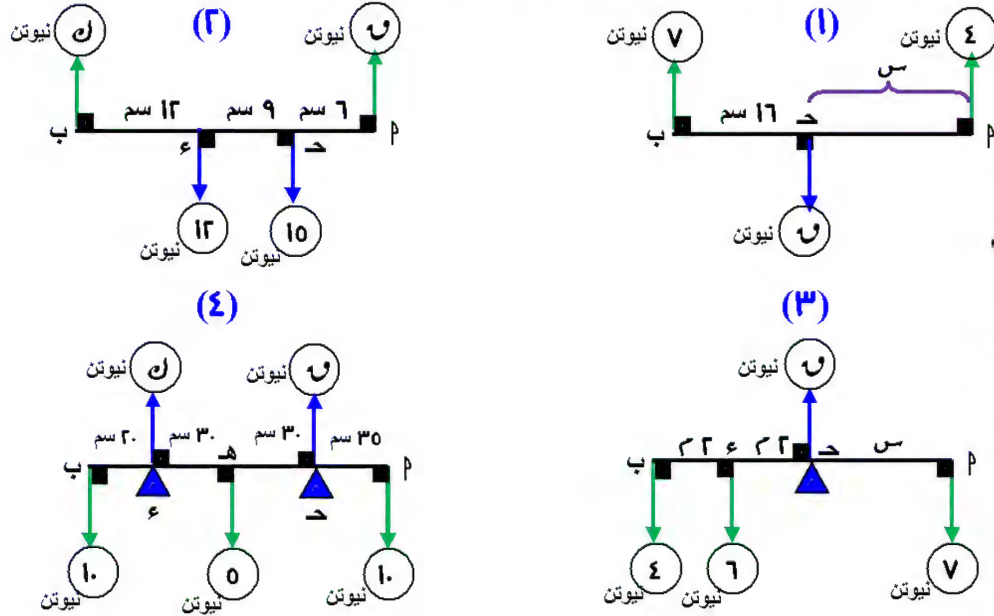
$$\therefore \sum M_P = 0 \Rightarrow 10 \times 2 + 50 \times 2 - B \times 4 = 0$$

$$\therefore B = 14$$

أى أن : الطفل يقف على بعد ١,٤ م من P لكى يتساوى ردى الفعل على الحاملين

## حل تمارين ( ٣ - ٢ ) صفحة ٥٨ بالكتاب المدرسى

فى كل من الأشكال الآتية : قضيب خفيف متزن أفقياً  
أوجد معيار كل من القوى  $U$  ،  $L$  ،  $b$  ، البعد  $s$



الحل

- (١)  $\therefore$  القضيب متزن  
 $\therefore U - 4 - 7 = 0$   
 $\therefore U = 11$  نيوتن  
 مجموع عزوم القوى حول نقطة  $D = 0$   
 $\therefore 4 \times s - 7 \times 16 = 0$   
 ومنها :  $s = 28$  سم  
 مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0  
 $\therefore U + L - 12 = 0$   
 $\therefore U + L = 12$   
 مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P = 0$
- (٢)  $\therefore$  القضيب متزن  
 $\therefore U - 10 - 12 = 0$   
 $\therefore U = 22$  نيوتن  
 مجموع عزوم القوى حول نقطة  $D = 0$   
 $\therefore 10 \times 9 - 12 \times 6 = 0$   
 ومنها :  $s = 18$  سم  
 مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0  
 $\therefore U + L - 10 = 0$   
 $\therefore U + L = 10$   
 مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P = 0$

## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥٦

يرتكز قضيب  $PM$  بطوله ٩ سم و وزنه ٥٠ نيوتن و يؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند الطرف  $P$  و الآخر عند نقطة  $D$  تبعد ٣ سم عن  $B$  و يحمل ثقل مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن  $B$  عين قيمة الضغط على كل حامل ، و أوجد أيضاً مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف  $B$  بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران و ما هى قيمة الضغط على  $D$  عندئذ

الحل

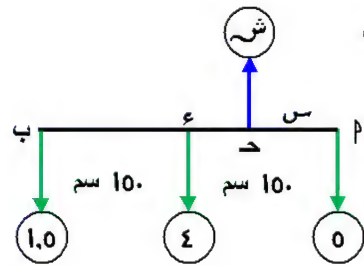
- أولاً : مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0  
 $\therefore 50 - 20 - 10 + R_p = 0$   
 $\therefore R_p = 20$  نيوتن (١)  
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة  $P = 0$   
 $\therefore 20 \times 10 - 50 \times 9 + R_D \times 15 = 0$   
 $\therefore R_D = 12,5$  نيوتن بالتعويض فى (١) ينتج :  $R_p = 12,5$  نيوتن  
 $\therefore$   $R_p = 12,5$  نيوتن ،  $R_D = 12,5$  نيوتن  
 ثانياً : عند تعليق ثقل و ليكن (و) من الطرف  $B$  فإن القضيب يكون على وشك الدوران حول  $D$   
 $\therefore R_p = 0$   
 $\therefore$  مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0  
 $\therefore 0 - 20 - 10 + R_D = 0$   
 $\therefore R_D = 30$  نيوتن (٢)  
 $\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة  $D = 0$   
 $\therefore 10 \times 10 - 30 \times 5 + W \times 15 = 0$   
 ومنها :  $W = 10$  نيوتن  
 بالتعويض فى (٢) ينتج :  $R_D = 10$  نيوتن  $\therefore$   $R_D = 10$  نيوتن

$\Sigma M_P = 48,20$  نيوتن  $\therefore \Sigma M_P = 48,20$  نيوتن ،  $\Sigma P = 41,70$  نيوتن

(٦) قضيب منتظم طوله ٣ متر و كتلته ٤ كجم و يحمل جسمين كتلتها ٥ كجم ، ١,٥ كجم عند طرفيه ، أوجد موضع نقطة تعليق على القضيب لكي يتزن القضيب فى وضع أفقى

الحل

نفرض أن نقطة التعليق على القضيب هي د تقع على بعد س من م ، و الشد فى خيط التعليق = شـ  
 $\therefore$  القضيب متزن



مجموع القياسات الجبرية للقوى = .

$$\therefore \text{شـ} = 1,0 - 4 - 0 = 1,0$$

$$\therefore \text{شـ} = 1,0 \text{ (I)}$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة م = .

$$\therefore 10 \times 4 + 1,0 \times 3 - \text{شـ} \times س = 0 \text{ ، بالتعويض من (I) :$$

$$\therefore 40 + 3 = 1,0 \times س \text{ ومنها : س} = 1,0 \text{ سم}$$

أى أن : نقطة تعليق القضيب ليتزن أفقياً تبعد عن الطرف م بمقدار ١٠ سم

(٧) م قضيب غير منتظم طوله ١٢ سم ، إذا ثبت عند طرفه ب

ثقل قدره ١ نيوتن و علق من طرفه م ثقل قدره ١٦ نيوتن

فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣ سم من

م ، و إذا نقص الثقل الموجود عند م و صار ٨ نيوتن فإن

القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤ سم من م ، أوجد وزن القضيب

و بعد نقطة تأثير وزنه عن م

الحل

بفرض أن :

وزن القضيب = و نيوتن ، يؤثر فى نقطة

$$\therefore 10 \times 10 + 1 \times 12 - 27 \times 1 = 0 \text{ ومنها : ل} = 10 \text{ نيوتن}$$

و بالتعويض فى (I) ينتج :  $17 = 10$  نيوتن

(٣)  $\therefore$  القضيب متزن مجموع القياسات الجبرية للقوى = .

$$\therefore 10 - 7 - 1 - 2 = 0 \text{ ومنها : س} = 4 \times 4 - 2 \times 7 - 2 \times 1 = 0$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = .

$$\therefore 4 \times 4 - 2 \times 7 - 2 \times 1 = 0 \text{ ومنها : س} = 4 \times 4 - 2 \times 7 - 2 \times 1 = 0$$

(٤)  $\therefore$  القضيب متزن مجموع القياسات الجبرية للقوى = .

$$\therefore 10 - 0 - 10 - 10 + 10 = 0 \text{ ومنها : ل} = 10 \text{ نيوتن}$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = .

$$\therefore 10 \times 10 - 30 \times 1 - 20 \times 1 + 30 \times 0 = 0$$

ومنها : ل = ١٠ نيوتن و بالتعويض فى (I) ينتج :  $10 = 10$  نيوتن

أجب عما يأتى :

(٥) قضيب منتظم طوله ٢ متر و كتلته ٧٥ كجم يرتكز فى وضع أفقى

على حاملين عند طرفيه ، علق ثقل مقداره ١٥ كجم من نقطة

على القضيب على بعد ٥ سم من أحد طرفيه أوجد رد الفعل عند

كل حامل

الحل

$\therefore$  القضيب متزن

مجموع القياسات الجبرية للقوى = .

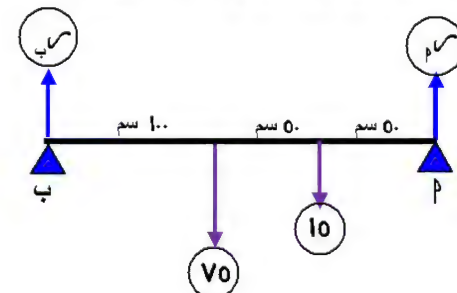
$$\therefore 90 = 90 + 10 - 90$$

$$\therefore 90 = 90 + 10 - 90 \text{ (I)}$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة م = .

$$\therefore 10 \times 10 + 0 \times 10 - 100 \times 2 = 0$$

ومنها :  $R_P = 41,70$  نيوتن و بالتعويض فى (I) ينتج :







## الحل

(٢) ∴ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ = ٤٠ - ٢٠ = ٢٠$$

$$٠ = ش_١ + ش_٢ = ٢٠ \quad (١)$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$٠ = ٤٠ \times ١٠ - ٢٠ \times ٤٠ = ٤٠٠ - ٨٠٠ = -٤٠٠$$

من (١) :  $ش_١ = ٣٠٠$  ث جم

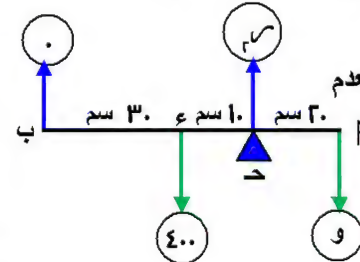
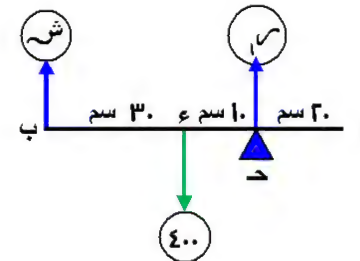
(ب) ∴ القضيب متزن ، الشد في الخيط عند ب ينعدم

أى  $ش = ٠$ 

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$٠ = ٢٠ \times ٤٠ - ١٠ \times ٤٠ = ٨٠٠ - ٤٠٠ = ٤٠٠$$

$$٠ = ٢٠ \times ٤٠ - ١٠ \times ٤٠ = ٨٠٠ - ٤٠٠ = ٤٠٠$$



(١٠) قضيب منتظم م ب طوله ٦٠ سم و وزنه ١٠ ث جم و يؤثر عند

منتصفه معلق في وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين أحدهما

مربوط في نقطة د حيث  $د = ٢٠$  سم ، علق ثقل قدره١٢ ث جم في نقطة ع حيث  $د = ٢٠$  سم ، فإذا كان أقصى

شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث جم فأوجد القيم التى تقع بينها

س و أوجد أيضاً أكبر و أقل قيمة للشد في كل من الخيطين

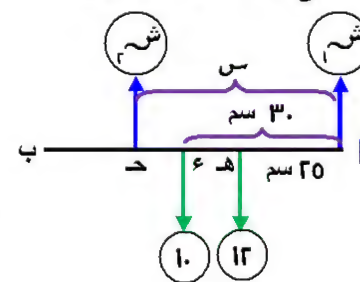
## الحل

من شروط الاتزان :

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١٢ - ٢٢ = -٢٤$$

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١٢ - ٢٢ = -٢٤ \quad (١)$$



مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١٢ - ٢٢ = -٢٤$$

∴ طول القضيب = ٦٠ سم ، ∴ أكبر قيمة لـ س = ٦٠ سم

عندما : س : ٦٠ سم ∴ من (٢) :  $ش_١ = ١٠$  ، من (١) :  $ش_٢ = ١٢$ 

∴ أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث جم

عندما :  $ش_١ = ١٥$  ، فإن من (١) :  $ش_٢ = ٧$  ، من (٢) : س = ٤٠

∴ القيم التى تقع بينها س هى : ٤٠ سم ، ٦٠ سم

أقل قيمة للشد عند د هى : ٧ ث جم ، أكبر قيمة له هى : ١٢ ث جم

أقل قيمة للشد عند د هى : ١٠ ث جم ، أكبر قيمة له هى : ١٥ ث جم

(١١) ترتكز مسطرة خفيفة م ب مقيسة بالسنتيمتر أفقياً على حاملين عند

النقطتين د ، ع بحيث  $د \supseteq ع$  ،  $د = ٢٠$  سم ،  $ع = ٤٠$  سم

علق ثقل مقداره (و) من النقطة م على المسطرة فوجد أنها تكون

على وشك الانقلاب إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ١٠ نيوتن

أو إذا علق من الطرف (ب) ثقل مقداره ٦ نيوتن أوجد مقدار (و)

$$و أثبت أن  $\frac{٢٠}{٩} = \frac{٢٠}{٩}$$$

## الحل

بفرض أن :  $د = ٢٠$  سم ،  $ع = ٤٠$  سم

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١٢ - ٢٢ = -٢٤$$

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١١ - ٢٢ = -٢٣$$

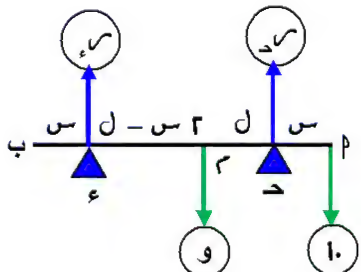
في الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف م

تكون المسطرة على وشك الانقلاب حول د

$$٠ = ش_١ + ش_٢ - ش_٣ - ش_٤ = ١٠ - ١١ - ٢٢ = -٢٣$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠



∴  $10 \times س - و \times ل = 0$  ومنها :  $و = ل$  و  $10 = ل$  (١)

في الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف ب

تكون المسطرة على وشك الانقلاب حول ء

∴  $س = 0$  ، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة ء = 0

و  $(2س - ل) \times 6 - س \times 10 = 0$

∴  $2س - ل = 10$  و  $ل = 6س$  ، بالتعويض من (١) ينتج :

$2س - 6س = 10$  ومنها :  $و = 8$  نيوتن

، بالتعويض ف (١) ينتج :  $ل = 10 = 8$  ∴  $ل = 8$  س

∴  $2س = 10 + س = 18$  ∴  $س = 9$  س سم

ب ،  $3س = (2س - ل) + س = 3س - 8 = 3س - 8$  س

∴  $3س = 18 - 8 = 10$  ∴  $س = 10/3$  سم

∴  $ل = 8$  س سم

∴  $س = 10/3$  سم

∴  $ل = 8$  س سم

(١٢) يحمل رجلان ب ، ب جسماً كتلته ٩ كجم معلق من قضيب معدني

متين و خفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦ سم و كانت

نقطة تعليق الجسم تبعد ٢ سم من ب ، فما مقدار ما يتحمله كل

رجل من هذا الثقل ؟

و إذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يتحمل أكثر من ٥ كجم فعين

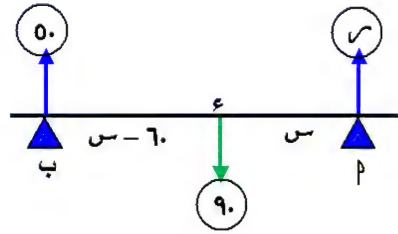
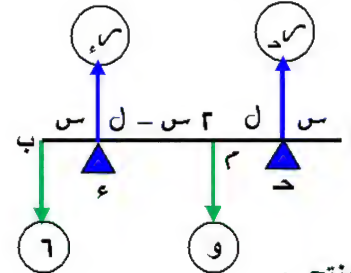
أكبر مسافة من ب يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب

من الاستمرار في حمل القضيب

**الحل**

في الحالة الأولى : من شروط الاتزان :

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0



$$(1) \quad 9 = س + ل \quad \therefore 0 = 9 - س + ل$$

، مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = 0 ∴  $9 \times 6 - س \times 10 = 0$

∴  $س = 3$  كجم ، من (١) :  $ل = 6$  كجم

أى أن : ما يتحمله الرجل ب من الثقل هو ٦ كجم

، ما يتحمله الرجل ب من الثقل هو ٣ كجم

في الحالة الثانية :

عندما يحمل الرجل ب : ٥ كجم

نفرض أن الثقل يكون على بعد س سم

من الرجل ب

من شروط الاتزان :

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = 0

$$(2) \quad 9 = 5 + ل \quad \therefore 0 = 9 - 5 + ل$$

، مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = 0

∴  $9 \times 6 - 5 \times 10 = 0$  ومنها :  $ل = 33 \frac{1}{3}$  سم

أى أن : أكبر مسافة من ب يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من

الاستمرار في حمل القضيب هي ٣٣,٣ سم

(١٣) تؤثر القوى المستوية الملتزنة و المتوازية  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4$

في النقط ب (٢، ١) ، ب (٤، ٣) ، ب (٥، ٣) ، ب (٥، ٣)

ء (١، ٠) على الترتيب فإذا كانت  $\vec{Q}_1 = 3س + 4ص$  ،

$\|\vec{Q}_1\| = ٢٠$  نيوتن في نفس اتجاه  $\vec{Q}_1$  أوجد كلاً من :

$\vec{Q}_2, \vec{Q}_3$  ، إذا كانت تعملان في اتجاه مضاد لاتجاه  $\vec{Q}_1$

**الحل**

$$\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2 \quad \therefore \vec{Q}_1 = \vec{Q}_2$$



## حل تمارين عامة صفحة ٦١ بالكتاب المدرسى

أكمل :

(١) قوتان متوازيتان و فى اتجاهين متضادين مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن

تؤثران فى P ، ب على الترتيب حيث P = ٣٥ سم فإن :

المحصلة تؤثر فى نقطة د حيث P = د = ....

(٢) مجموع عزوم عدة قوى متوازية ومستوية حول نقطة يساوى ....

(٣) قوتان متوازيتان و فى اتجاهين متضادين مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن

و تؤثران فى P ، ب على الترتيب حيث P = ٣٩ سم فإن :

المحصلة تؤثر فى نقطة د حيث P = د = ....

الحل

(١) نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة الكبرى  
من الشكل المقابل :

$$10 \times \text{ب} = 10 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 10 \times \text{د}$$

$$10 \times \text{د} = 10 \times \text{ب} + 30 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 10 \times \text{د}$$

$$10 \times \text{د} = 10 \times \text{ب} + 30 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 10 \times \text{د}$$

$$0 \times \text{د} = 10 \times \text{ب} + 30 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 10 \times \text{د}$$

(٢) عزم المحصلة حول نفس النقطة

(٣) نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

من الشكل المقابل :

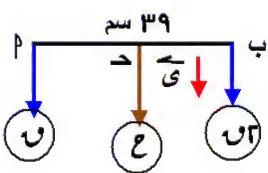
$$2 \times \text{ب} = 2 \times \text{د} + 39 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 2 \times \text{د}$$

$$2 \times \text{ب} = 2 \times \text{د} + 39 \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 2 \times \text{د}$$

$$39 = \text{ب} \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 39$$

$$13 = \text{ب} \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 13$$

$$26 = \text{ب} \times \text{د} \quad \text{ب} \times \text{د} = 26$$



$$(1) \quad \|\vec{C}\| \times |ك| = \|\vec{C}\| ك = \|\vec{C}\| \therefore$$

$$0 = 16 + 96 = \|\vec{C}\| \therefore \vec{C} = 4 + 3 = 7$$

$$0 \times |ك| = 20 : (1) \therefore \text{من (1)} \quad 20 = \|\vec{C}\| \therefore$$

$$4 \pm = ك \therefore ك = 4$$

$$\vec{C} = ك \therefore \vec{C} \text{ فى نفس اتجاه } \vec{C}$$

$$\vec{C} = 4 = \vec{C} \therefore 16 + 96 = 112$$

$$\vec{C} \parallel \vec{C} \therefore \vec{C} = 2 = \vec{C} \therefore 2 \times 4 + 2 \times 3 = 14$$

القوى متزنة : مجموع عزوم القوى حول نقطة = ٠

$$\vec{C} = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B} + \vec{C} \times \vec{C} \therefore$$

$$+ (4, 3) \times [(0, 1) - (1, 2)] \therefore$$

$$+ (16, 96) \times [(0, 1) - (3, -4)] \therefore$$

$$\vec{C} = (24, 23) \times [(0, 1) - (0, 3)] \therefore$$

$$+ (16, 96) \times (3, -4) + (4, 3) \times (1, -3) \therefore$$

$$\vec{C} = (24, 23) \times (0, 4) \therefore$$

$$\vec{C} = (2 + 12 - 10) \times \vec{C} \therefore$$

$$\vec{C} = 9 - 12 = -3 \therefore$$

القوى متزنة :  $\vec{C} = \vec{C}$ 

$$\vec{C} = \vec{C} + \vec{C} + \vec{C} + \vec{C} \therefore$$

$$(\vec{C} + \vec{C} + \vec{C}) - \vec{C} = \vec{C} \therefore$$

$$[ \vec{C} (12 - 16 + 4) + \vec{C} (9 - 12 + 3) ] - =$$

$$- = 8 - 6 = 2$$

أجب عما يأتى :

(٤) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن و مقدار إحدى القوتين ١٥٠ نيوتن و تعمل على بعد ٤٠ سم من المحصلة ، أوجد القوة الثانية و البعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة و المحصلة تعملان : أولاً : فى اتجاه واحد ثانياً : فى اتجاهين متضادين

الحل

نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه المحصلة  
 $\therefore \vec{C} = \frac{250}{100} \hat{i}$  ،  $\vec{C} = \frac{100}{100} \hat{i}$

أولاً :  $\vec{C}$  ،  $\vec{C}$  فى اتجاه واحد

$$\therefore \vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$$

$$\therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2$$

أى أن :  $\vec{C}_1$  مقدارها ١٥٠ نيوتن و اتجاهها نفس اتجاه المحصلة

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة د = عزم المحصلة حول نقطة د = .

$$\therefore 100 \times 100 - 250 \times 40 = 0 \quad \therefore 100 \times 100 - 250 \times 40 = 0$$

$$\therefore 100 \times 100 - 250 \times 40 = 0 \quad \therefore 100 \times 100 - 250 \times 40 = 0$$

ثانياً :  $\vec{C}$  ،  $\vec{C}$  فى اتجاهين متضادين

$$\therefore \vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$$

$$\therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2$$

$$\therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2 \quad \therefore \vec{C}_1 = \vec{C} - \vec{C}_2$$

أى أن :  $\vec{C}_1$  مقدارها ٤٠٠ نيوتن و اتجاهها نفس

اتجاه المحصلة

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة د = عزم المحصلة حول نقطة د = .

$$\therefore 100 \times 100 - 400 \times 40 = 0 \quad \therefore 100 \times 100 - 400 \times 40 = 0$$

$$\therefore 100 \times 100 - 400 \times 40 = 0 \quad \therefore 100 \times 100 - 400 \times 40 = 0$$

(٥)

ب ، د ، ع أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث :  
 ب = ٣٢ سم ، ب د = ٤٠ سم ، د ع = ٨ سم أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى ب ، د على الترتيب و أثرت القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى ب ، ع فى اتجاه مضاد للقوتين عند ب ، د عين محصلة هذه المجموعة و بعد نقطة تأثيرها عن ب

الحل

نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين عند ب ، د

$$\therefore \vec{C} = \frac{8 + 10 + 3 - 7}{8} \hat{i} \quad \therefore \vec{C} = \frac{8 + 10 + 3 - 7}{8} \hat{i}$$

أى أن مقدار المحصلة ٨ نيوتن فى

اتجاه القوتين عند ب ، د

و بفرض أن : المحصلة تعمل فى نقطة م  $\Rightarrow \vec{C} \Rightarrow \vec{C}$

$\therefore$  مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = عزم المحصلة حول نقطة ب

$$\therefore 8 \times 32 = 7 \times 10 + 3 \times 8 - 10 \times 40 \quad \therefore 8 \times 32 = 7 \times 10 + 3 \times 8 - 10 \times 40$$

$$\therefore 8 \times 32 = 7 \times 10 + 3 \times 8 - 10 \times 40 \quad \therefore 8 \times 32 = 7 \times 10 + 3 \times 8 - 10 \times 40$$

(٦) وضعت الأوزان ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ث كجم على قضيب خفيف بحيث

تبعد عن طرفيه ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ سم أوجد بعد نقطة تعليق القضيب

الحل

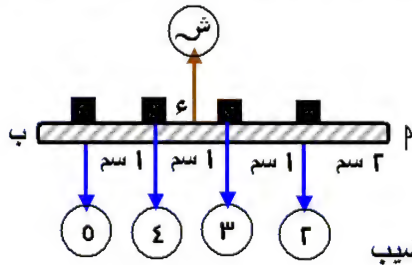
$\therefore$  القضيب متزن

$\therefore$  مجموع القياسات الجبرية للقوى = .

$$\therefore 0 - 2 - 3 - 4 - 5 = 0 \quad \therefore 0 - 2 - 3 - 4 - 5 = 0$$

$\therefore$  ش = ١٤ ث كجم

بفرض أن : ش يؤثر عند نقطة ع على القضيب



الحل

في الحالة الأولى :

عند تعليق ثقل من الطرف P

يكون القضيب على وشك الدوران حول د

∴  $\Sigma M_P = 0$  ، من شروط الاتزان :

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$\therefore 20 \times 3 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore 60 - 40 = 0 \quad \therefore 20 = 10$$

أى أن : نقطة تأثير وزن القضيب تكون على بعد ٣ سم من الطرف P

في الحالة الثانية :

نفرض أن أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف

ب هو : و

∴ القضيب يكون على وشك الدوران حول د

$$\therefore \Sigma M_D = 0$$

، من شروط الاتزان :

$$\therefore 20 \times 2 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore 40 - 40 = 0 \quad \therefore 20 = 10$$

$$\therefore 20 \times 2 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore 40 - 40 = 0 \quad \therefore 20 = 10$$

أى أن : أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف هو ٨٠ ث كجم

الحل

أحمد الشنتوي

، مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$\therefore 20 \times 3 + 10 \times 2 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore 60 + 20 - 40 = 0 \quad \therefore 40 = 0$$

$$\therefore 20 \times 3 + 10 \times 2 - 10 \times 4 = 0 \quad \therefore 60 + 20 - 40 = 0 \quad \therefore 40 = 0$$

أى يجب أن يعلق القضيب من نقطة تبعد ٣,٨٥V سم من طرفه P ليظل أفقياً

(٧) P قضيب منتظم طوله ١٠ سم و وزنه ١٠ نيوتن يؤثر في منتصفه

يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند P والآخر عند نقطة على بعد

٢٥ سم من B أوجد الثقل الذي يجب تعليقه من الطرف B لتكون

قيمة رد الفعل للحامل القريب من الطرف B مساوياً ستة أمثال رد

فعل الحامل عند P ثم أوجد رد فعل كل حامل في هذه الحالة

الحل

∴ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

$$\therefore R_1 + R_2 - 10 - 10 = 0 \quad \therefore R_1 + R_2 = 20$$

$$\therefore R_1 = 7 \quad R_2 = 13 \quad (1)$$

، مجموع عزوم القوى حول نقطة B = ٠

$$\therefore 10 \times 10 - 20 \times 10 = 0 \quad \therefore 100 - 200 = 0 \quad \therefore 10 = 10$$

من (١) ينتج : و = ٤ نيوتن أى أن : الثقل المعلق من الطرف B = ٤ نيوتن

، رد الفعل عند الحامل P = ٢ نيوتن ، رد الفعل عند الحامل د = ١٢ نيوتن

(٨) P قضيب غير منتظم طوله ٨٠ سم و وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز

في وضع أفقى على حاملين عند د ، حيث P = د = B = ع

١٠ سم ، علق من P ثقل قدره ٤٠ ث كجم فأصبح القضيب على

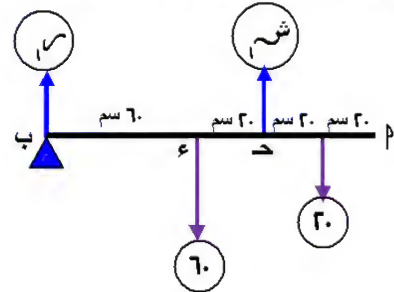
وشك الدوران حول د أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن P

ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من B دون أن يختل التوازن مع

رفع الثقل المعلق من P



(١٠) ب قضيب منتظم طوله ١٢ سم و وزنه ٦ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه يرتكز فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب و يحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة د على بعد ٤ سم من م ، و يحمل ثقلاً مقداره ٢ نيوتن عند نقطة تبعد ٢ سم من م ، عين قيمة كل من الشد فى الخيط و الضغط على الحامل ، و ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف م حتى يصبح على وشك الانفصال عن الحامل ، و ما قيمة الشد فى الخيط عندئذ



الحل  
فى الحالة الأولى :  $\therefore$  القضيب متزن  
 $\therefore$  مجموع القياسات الجبرية للقوى = ٠

$$\therefore ٠ = ٦ - ٢ - ٢ + ش_١$$

$$\therefore ش_١ + ٢ = ٨ \quad (١)$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$\therefore ٠ = ٦ \times ٢ - ٢ \times ٢ - ٢ \times ٢ + ش_١ \times ١٠$$

$$\therefore ش_١ = ٧ \text{ نيوتن}$$

فى الحالة الثانية :

نفرض الثقل المعلق من الطرف م هو : و  
 $\therefore$  القضيب على وشك الانفصال عن الحامل  
 $\therefore ش_١ = ٠$  ،  $\therefore$  القضيب متزن

$$\therefore ٠ = ٦ - ٢ - ٢ + ش_١$$

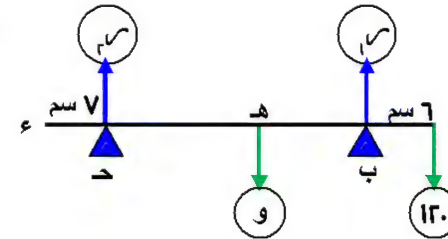
$$\therefore ش_١ = ٨ - ٦ = ٢$$

$$\therefore ش_١ + ٨ = ١٠ \quad (٢)$$

مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$\therefore ٠ = ٦ \times ٢ - ٢ \times ٢ - ٢ \times ٢ + ش_١ \times ١٠$$

$$\therefore ش_١ = ١٠ \text{ نيوتن}$$



نفرض أن هـ هى نقطة تعليق وزن القضيب  
 $\therefore$  هـ تقسم القضيب بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف م

$\therefore$  نفرض أن : م هـ = ٢ سم

، هـ ع = ٣ سم فيكون :

$$٦ - ٢ = ٤ \text{ سم} \quad ٣ - ٢ = ١ \text{ سم}$$

فى الحالة الأولى : عند تعليق ثقل مقداره ١٢ ث جم من الطرف م يكون القضيب على وشك الدوران حول ب  $\therefore ش_١ = ٠$

، من شروط الاتزان : مجموع عزوم القوى حول نقطة ب = ٠

$$\therefore ٠ = ٦ \times ١٢ - (٦ - ٢) \times ٣$$

$$\therefore ٧٢ = ٦ - ٢ \quad (١)$$

فى الحالة الثانية :

عند تعليق ثقل مقداره ١٨ ث جم من الطرف ع يكون القضيب على وشك الدوران حول د

$$\therefore ش_٣ = ٠$$

، من شروط الاتزان : مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

$$\therefore ٠ = ٧ \times ١٨ - (٧ - ٣) \times ٤$$

$$\therefore ١٢٦ = ٧ - ٣ \quad (٢)$$

بضرب (٢)  $\times$  ٢ ، ضرب (١)  $\times$  (٣) و جمع المعادلتين ينتج :

$$٣٦٠ = ٤ - ٣ \quad \therefore ٩ = ٣$$

، بالتعويض فى (١) ينتج : ٧٢ = ١٨ - ٣  $\therefore ٧ = ٣$  سم

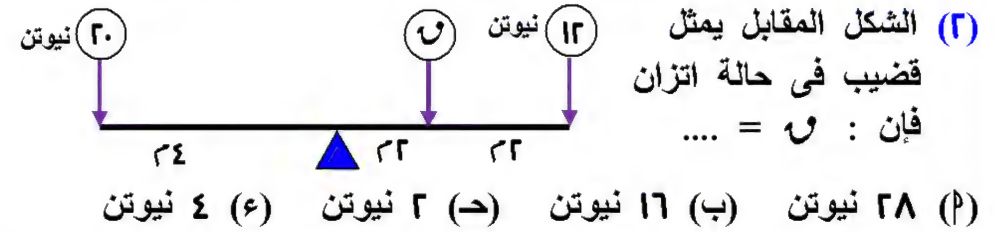
$$\therefore ٦ - ٢ = ٤ \text{ سم} \quad ٣ - ٢ = ١ \text{ سم} \quad ١٢ = ٧ - ٣$$

$$\therefore \text{البعد بين الحاملين} = ١٢ + ٨ = ٢٢ \text{ سم}$$

## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

السؤال الأول : أختَر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة



الحلـ

∴ القضيب متزن

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطة تأثير الحامل = صفر

$$\therefore 20 \times 22 - 12 \times 22 - U \times 22 = 0 \quad \text{صفر ومنها : } U = 16 \text{ نيوتن}$$

## السؤال الثالث :

(١) قوتان متوازيتان و فى نفس الاتجاه مقدارهما ١٠ ، ١٥ نيوتن تؤثران

فى النقطتين ٢ ، ٢ حيث ٢ = ٧٥ سم

أوجد محصلة القوتين

الحلـ

نفرض  $\vec{U}$  متجه وحدة فى اتجاه القوتين

$$\therefore \vec{U}_1 = \vec{U} \quad , \quad \vec{U}_2 = \vec{U} \quad \therefore 10 = \vec{U} \quad , \quad 15 = \vec{U}$$

مقدار المحصلة :

$$\vec{R} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 = \vec{U} + \vec{U} = 2\vec{U} \quad \therefore R = 20$$

اتجاه المحصلة : نفرض أن المحصلة تؤثر فى نقطة  $\Delta \Rightarrow \vec{p}$ 

$$\therefore 10 \times \Delta = 20 \times \Delta \quad \therefore (20 - 10) \times \Delta = 0$$

$$\therefore 10 \times \Delta - 10 \times \Delta = 0$$

$$\therefore 20 = \Delta$$

$$\therefore \Delta = 20 \text{ سم}$$

أى أن : مقدار المحصلة يساوى ٢٥ نيوتن و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه القوتين و تؤثر فى نقطة تبعد عن ٢ بمقدار ٢٥ سم

## الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختَر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

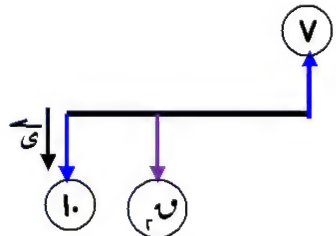
(٤) قوتان متوازيتان و متضادتان فى الاتجاه مقدار احدهما ٧ نيوتن

و مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن

فإن : مقدار القوة الأخرى يساوى ....

(٣ نيوتن (ب) ١٧ نيوتن (د) ٢٧ نيوتن (٤) ٦ نيوتن

الحلـ

نفرض  $\vec{U}$  متجه وحدة فى اتجاه محصلة القوتين  
من الشكل المقابل :

$$10 = \vec{U} - \vec{U} = V - U$$

$$\text{ومنها : } U = 17$$

أى أن : مقدار القوة الأخرى = ١٧ نيوتن

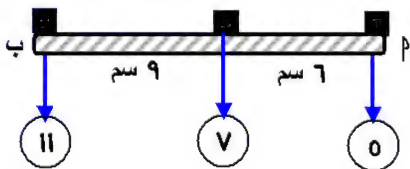
## السؤال الثالث :

(١) وضعت ثلاثة اجسام أوزانها ٥ ، ٧ ، ١١ ث كجم على قضيب خفيف

كما بالشكل عين نقطة تعليق على

القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً

الحلـ

نفرض أن : القضيب يعلق من نقطة  $\Delta$  التى تبعد عن ٢ مسافة  $\Delta = 1$  وحدة طول





$$\therefore 3 \times \frac{3}{4} + 1 \times 2 - 0 \times \frac{1}{4}$$

$$- 0 \times 0 = 0 \quad \text{و منها : } 3 = 3 \text{ ث كجم}$$

### الاختبار الخامس

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٣) قوتان متوازيتان متحدا الاتجاه مقدار احدهما ضعف مقدار الأخرى  
و مقدار محصلتهما ٣٩ نيوتن فإن مقدار اصغرها يساوى ....

الحلـ

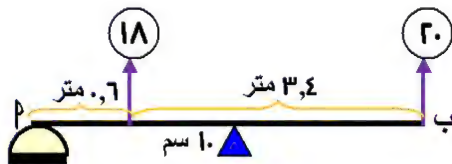
بفرض أن : مقدار الصغرى = ٢ . مقدار القوة الكبرى = ٣

∴ القوتان متوازيتان متحدا الاتجاه

$$\therefore 2 + 3 = 39 \quad \therefore 3 = 3 \quad \text{و منها : } 3 = 3 \text{ نيوتن}$$

السؤال الثالث :

(١) إذا كانت محصلة ثلاث قوى



تؤثر على القضيب P ب  
مهمل الوزن فى الشكل المقابل

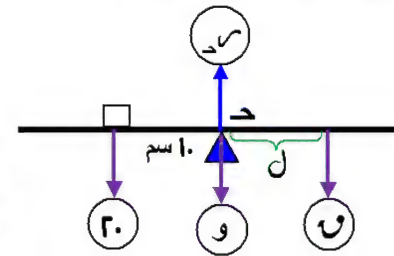
هى ١٣,٦ ث كجم و تؤثر لأعلى فى نقطة تبعد ٣ متر على يمين P  
اوجد مقدار و اتجاه و نقطة تأثير القوة الثالثة فإذا اتزن القضيب  
اوجد قيمة و

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين  
منتصف القضيب

(ح) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٥ سم على يسار  
منتصف القضيب

(ع) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٥ سم على يسار  
منتصف القضيب

الحلـ



بفرض أن : قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل  
تؤثر على على بعد ١٠ سم على يمين منتصف  
القضيب ∴ القضيب متزن  
∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠  
∴ ١٠ × ٢٠ - ١٠ × ١٠ = ٠

∴ ١٠ × ٢٠ = ٢٠٠ و لكى يتحقق ذلك يجب أن يكون مقدار القوة ١٠ نيوتن  
و تؤثر لأسفل على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

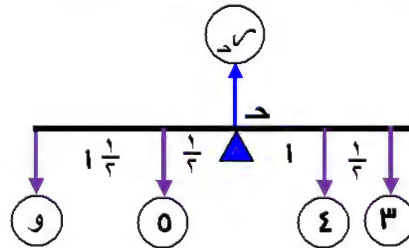
السؤال الثالث :

(١) قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه

علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه و على بعد ١ ، ١,٥  
متر من منتصفه على الترتيب و علق ثقلان ٥ ، ٥ ث كجم فى

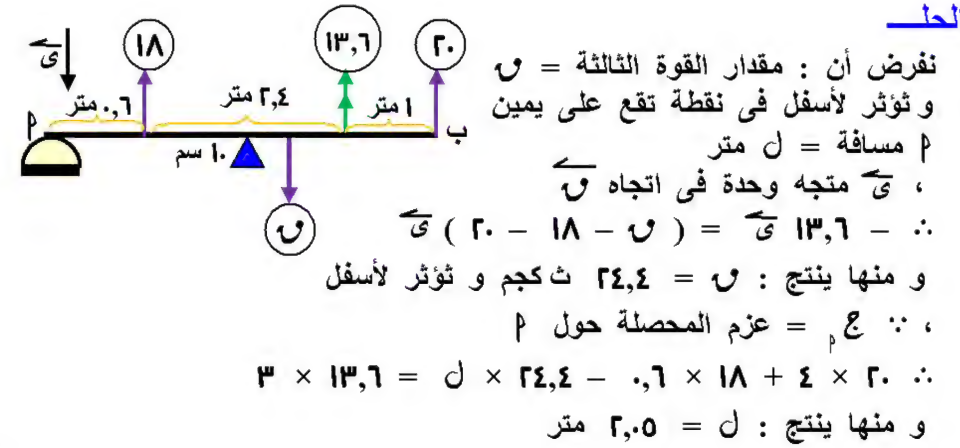
النصف الآخر و على بعد ٢ ، ١ متر من منتصفه على الترتيب  
فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و

الحلـ



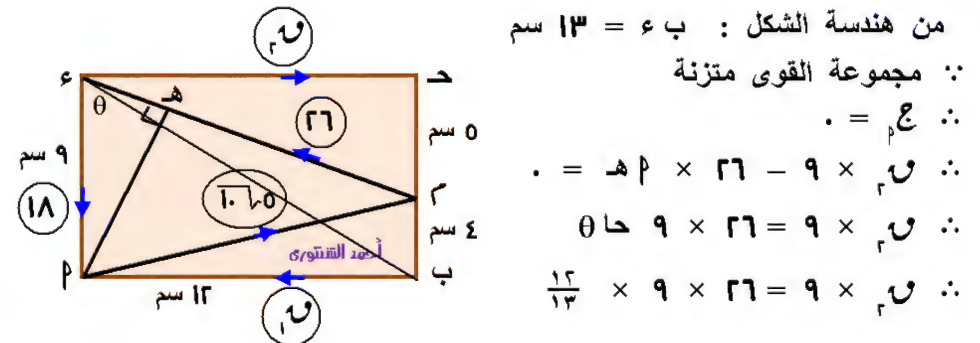
∴ القضيب متزن  
∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة د = ٠

## الحل



(٢)  $P$  ب د ع مستطيل فيه  $P$  ب = ١٢ سم ، ب د = ٩ سم ،  
 $M \supset \overline{P-D}$  بحيث ب م = ٤ سم أثرت قوى مقاديرها  $U_1$  ،  
١٠.٦٥ ، ٢٦ ،  $U_2$  ، ١٨ نيوتن فى اتجاهات ب م ،  $\overrightarrow{P-M}$  ،  
،  $\overrightarrow{M-D}$  ،  $\overrightarrow{D-E}$  ،  $\overrightarrow{P-E}$  على الترتيب فإذا كانت مجموعة  
القوى متزنة أوجد قيمتى  $U_1$  ،  $U_2$

## الحل



تم بحمد الله  
أحمد الشنتوري

# المتميز

في

## الرياضيات التطبيقية الأسنانكا

الجزء النظري

و

حلول التمارين

الوحدة الرابعة

|| ق ||

( سيم ، صيم )

ع

أحمد

الصف الثالث الثانوي

القسم العلمي

شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري



## الوحدة الرابعة .... الاتزان العام

٤ - ١

## اتزان جسم جاسئ

انعدام عزوم مجموعة من القوى بالنسبة لأى نقطة :  
تعريف :

تتوازن عزوم الدوران المؤثرة على جسم فى اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب حتى يكون الجسم فى حالة اتزان  
و من ذلك نجد أن :

يكون الجسم الزاقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فى حالة اتزان استاتيكي إذا تحقق الشرطان التاليان :

(١) أن يندم متجه محصلة القوى للمجموعة (  $\vec{C} = \vec{C}$  )

(٢) أن يندم عزوم القوى بالنسبة لنقطة (  $\vec{C} = \vec{C}$  )

و هذه الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية الشكل المقابل :

يبين مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة

{  $\vec{C}$  ,  $\vec{S}$  ,  $\vec{V}$  } بحيث يقع  $\vec{S}$

$\vec{S}$  فى مستوى القوى ، و بالتالى يكون  $\vec{C}$  عمودياً على هذا المستوى

و بذلك يمكن تحليل متجه  $\vec{C}$  فى اتجاهى  $\vec{S}$  ،  $\vec{V}$  بينما  $\vec{C}$  يوازي متجه الوحدة  $\vec{C}$

لذلك فإن :  $\vec{C} = \vec{S} + \vec{V}$  ،  $\vec{C} = \vec{C}$

حيث :  $\vec{S}$  مجموعة المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه  $\vec{S}$  ،  $\vec{V}$  مجموعة المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه  $\vec{V}$

ج مجموعة المركبات الجبرية لعزوم القوى المجموعة فى اتجاه  $\vec{C}$  ،  
و من ذلك نجد أنه إذا كان :  $\vec{S} = \vec{S}$  ،  $\vec{V} = \vec{V}$  ،  $\vec{C} = \vec{C}$  .

فإن :  $\vec{C} = \vec{C}$  ،  $\vec{C} = \vec{C}$

و حيث لم يتم تحديد اتجاهى  $\vec{S}$  ،  $\vec{V}$  فى المستوى فإنه يمكن التوصل للصياغة التالية :

الشروط الكافية و اللازمة لاتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية :

لكى تتوازن مجموعة من القوى المستوية يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

(١) يندم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويهما

(٢) يندم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها

و يمكن التعبير رياضياً عن هذه الشروط كالتالى :

$\vec{S} = \vec{S}$  ،  $\vec{V} = \vec{V}$  ،  $\vec{C} = \vec{C}$

خطوات دراسة إتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية :

(١) تحديد جميع القوى المؤثرة على الجسم و اتجاهها و نقط تأثيرها

(٢) تحليل القوى المائلة إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين

(٣) تطبيق شروط الإتزان العام و هى :

(١) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه ما

( الأفقى عادة ) = صفر "  $\vec{S} = \vec{S}$  "

(٢) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى الإتجاه العمودى

( الرأسى عادة ) = صفر "  $\vec{V} = \vec{V}$  "

(٣) المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أى نقطة فى مستويها

= صفر " ج = . "

ملاحظات :

(١) إذا أرتكز قضيب على مستوى أملس فإن :

رد الفعل يكون عمودياً على المستوى

(٢) إذا أرتكز قضيب بإحدى نقاطه على ( وتد ، حائط ، .... ) فإن :

رد الفعل يكون عمودياً على القضيب

(٣) إذا أتصل قضيب بحائط رأسى عن طريق مفصل فإن :

رد الفعل غير معلوم الاتجاه و يمكن تحليله إلى مركبتين هما

رد الفعل هما  $S_1$  ،  $V_1$  ،  $L$  قياس زاوية ميله على الأفقى

حيث :  $S_1 + V_1 = S_1$  ،  $L = \frac{V_1}{S_1}$

(٤) إذا أرتكز قضيب على مستوى خشن فإن :

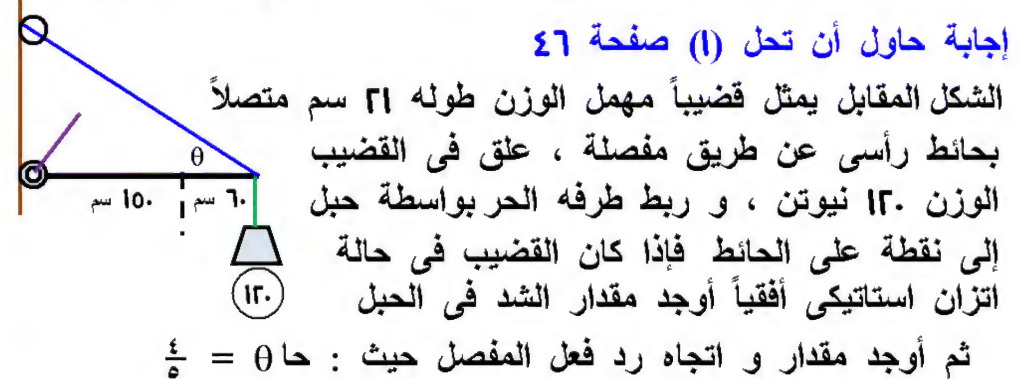
رد الفعل غير معلوم الاتجاه و يمكن تحليله إلى مركبتين هما

رد الفعل العمودى على المستوى ، و قوة الاحتكاك فى عكس

الاتجاه الذى يميل القضيب للحركة فيه

و يكون الاحتكاك نهائياً عندما يكون القضيب على وشك الحركة

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٤٦



الحل

نفرض أن : مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند  $P$  هما :

$S_1$  ،  $V_1$  ، الشكل المقابل يمثل القوى المؤثرة

على القضيب ،  $\therefore$  القضيب متزن

$\therefore S_1 = .$   $\therefore S_1 - S_2 = \theta$  حنا  $\theta = .$

$\therefore S_1 = S_2$  حنا  $\theta = \frac{3}{5} = \theta$  حنا (١)

$V_1 = .$   $\therefore V_1 + S_2 = 120 - \theta$  حنا  $\theta = 120$  .

$\therefore \frac{4}{5} = \theta$  حنا  $120 = V_1 - 120$  (٢)

$\therefore V_1 = 240$  .  $\therefore V_1 \times 10 = .$   $\therefore V_1 = .$

$\therefore$  من (٢) ينتج :  $\frac{4}{5} = \theta$  حنا  $120 = .$   $\therefore S_2 = 10$  نيوتن

$\therefore$  من (١) ينتج :  $S_1 = 10 \times \frac{3}{5} = 6$  نيوتن

$\therefore S_1 + (90) = (90) + (0)$   $\therefore S_1 = 90$  نيوتن ،  $L = \frac{V_1}{S_1}$

$\therefore L = 0$  أى أن : رد فعل المفصل  $= 90$  نيوتن و يميل على الأفقى

بزاوية قياسها  $0$  " اتجاه رد الفعل أفقى "

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٦٨

$P$  قضيب منتظم طوله ٦٠ سم و وزنه ٨ نيوتن يتصل طرفه  $P$  بمفصل

مثبت فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٦ نيوتن فى نقطة من القضيب

تبعد ٤٠ سم عن الطرف  $P$  ، اتزن القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط

خفيف يتصل أحد طرفيه بالطرف  $B$  و ثبت الطرف الآخر للخيط فى نقطة

على الحائط تبعد ٨٠ سم رأسياً أعلى  $P$

أوجد الشد فى الخيط و رد فعل المفصل

الحل



نفرض أن : مقدار مركبتى رد فعل المفصل عند  $P$  هما :  $S_1$  ،  $S_2$  ،  
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

من هندسة الشكل :  $P = 100$  سم

$\therefore$  القضيب متزن  $\therefore S_1 = S_2$   $\therefore S_1 = S_2$  - شـ  $\theta$  حـ  $\theta = 0$  .

$$(1) \quad S_1 = S_2 = 100 \times \frac{3}{5} = 60 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 60 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 60 \text{ سم} + 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 60 \text{ سم}$$

$$(2) \quad S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 120 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 20 \text{ سم}$$

أى أن : رد فعل المفصل  $P = 120$  نيوتن و يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $40^\circ$

### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦٩

$P$  ب قضيب منتظم وزنه  $30$  كجم و طولها  $4$  أمتار يرتكز بطرفه  $P$  على مستو أفقى أملس و بطرفه الآخر  $B$  على حائط رأسى أملس ،  
أترن السلم فى مستو رأسى و كان قياس زاوية ميله على الأفقى  $40^\circ$   
بواسطة حبل أفقى يصل الطرف  $P$  بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسياً  
أسفل  $B$  تماماً ، فإذا صعد رجل وزنه  $80$  كجم على هذا السلم ،  
فأثبت أن مقدار الشد فى الحبل يزداد كلما صعد الرجل ، و إذا كان

الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على  $17$  كجم  
فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعد بها  
الرجل دون أن ينقطع الحبل

الحل

الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

$\therefore$  القضيب متزن

$$\therefore S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$S_1 = S_2 = 100 \text{ سم} - 100 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

و يلاحظ من هذه العلاقة أن : كلما زاد مقدار الشد فى الحبل ( شـ ) زادت قيمة

( س ) أى كلما صعد الرجل لمسافة أكبر على السلم

و عندما لا يتحمل الحبل شداً يزيد مقداره على  $17$  كجم " مقدار شـ أكبر ما

ما يمكن " يكون مقدار س أكبر ما يمكن

$$\therefore 17 = 100 \text{ سم} + 100 \text{ سم} = 200 \text{ سم} \text{ منها : س} = 2,6 \text{ متراً}$$

### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٧٠

$P$  ب قضيب منتظم مقدار وزنه  $40$  نيوتن ، يرتكز بطرفه  $P$  على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب يساوى  $\frac{1}{2}$  و بطرفه  $B$  على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها و بين القضيب يساوى  $\frac{1}{2}$  ، فإذا كانت أقل قوة أفقية تجعل الطرف  $B$  للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط تساوى  $6$  نيوتن ، فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى ، علماً بأن القضيب يتزن فى مستوى رأسى



## الحل

نفرض أن : طول القضيب =  $l$  ، و أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن

$$\therefore \text{القضيب متزن} \quad \therefore \sum \tau = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad (1) \quad 180 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

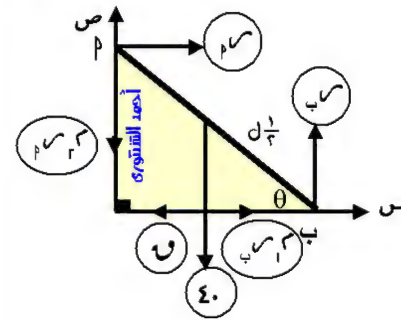
$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة VI

ب قضيب منتظم وزنه ٢٠ نيوتن و طوله ٦ سم يرتكز بطرفه  $p$  على مستوى أفقى خشن ، و يرتكز عند إحدى نقطه  $د$  على وتد أملس يعلو ٢٥ سم عن المستوى الأفقى و كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأفقى  $30^\circ$  أوجد رد فعل الوتد و كذلك معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى علماً بأن القضيب فى مستوى رأسى

## الحل



الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن

$$\therefore \text{القضيب متزن} \quad \therefore \sum \tau = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

$$\therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0 \quad \therefore \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$$

## حل تمارين ( ٤ - ١ ) صفحة ٧٠ بالكتاب المدرسى

أولاً : ضع علامة ( ✓ ) أو علامة ( × ) :

(١) لكي تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم و يكفى أن ينعدم متجه القوى

(٢) لكي تتزن مجموعة من القوى المؤثرة على جسم ما يلزم و يكفى أن ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى كل من اتجاهين متعامدين واقعين فى مستوياتها

(٣) إذا انعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى لمجموعة ما ، و انعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة فى مستوياتها كانت هذه المجموعة متزنة

(٤) يتزن السلم إذا ارتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية ملساء و بطرفه الآخر على حائط رأسى خشن

الحل

(١) ( × ) لكي تتزن مجموعة من القوى المستوية غير المتلاقية فى نقطة يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

(١) أن ينعدم متجه محصلة القوى للمجموعة (٢) أن ينعدم عزوم القوى بالنسبة لنقطة

(٢) ( × ) لكي تتزن مجموعة من القوى المؤثرة على جسم ما يلزم و يكفى أن

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستوياتهما

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستوياتها

(٣) ( ✓ )

(٤) ( × ) يمكن أن يتزن سلم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة و بطرفه الآخر على حائط رأسى أملس

ثانياً : أكمل ما يأتى :

(٥) الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى هى ....

(٦) إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس فإن رد فعل التود يكون

(٧) إذا وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل

الاحتكاك بينه و بين الجسم  $\frac{1}{3}$  فإن مقدار القوة الأفقية التى تجعل على وشك الحركة تساوى ....

الحل

(٥) الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى هى :

(١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستوياتهما

(٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستوياتها

(٦) إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس فإن رد فعل التود يكون عمودياً على القضيب

(٧) الجسم على وشك الحركة

$$\therefore \mu = 0.6$$

$$\mu = 0.6 = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 = 2 \text{ نيوتن}$$

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) ب قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن و طوله ١٢ سم يتصل بأحد طرفيه

بمفصل مثبت عند طرفه ب و المفصل مثبت فى حائط رأسى ، علق

ثقل قدره ٦ نيوتن من نقطة على القضيب تبعد ٢٠ سم عن طرفه ب

ثم حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل رفيع ب د مثبت طرفه

د بنقطة تقع رأسياً فوق ب تماماً و تبعد عن ب مسافة ٩ سم

أوجد مقدار الشد فى الحبل و مقدار و اتجاه رد فعل المفصل

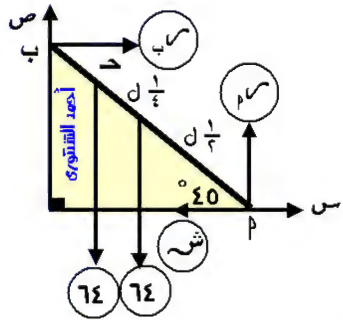
الحل





عين قوة الشد فى الحبل و ردى فعل الحائط و المستوى

**الحل**



نفرض أن : طول القضيب =  $l$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

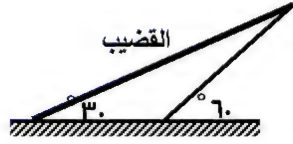
$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

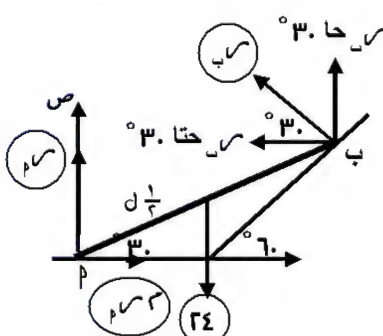
$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

(١٢) فى الشكل المقابل :

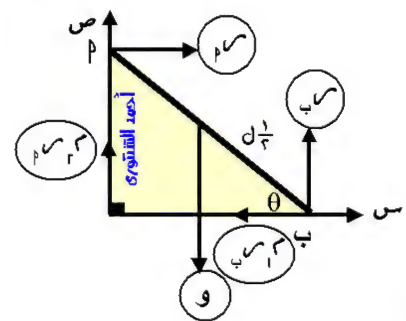


يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث كجم بأحد  
طرفيه على أرض أفقية خشنة و بطرفه الآخر  
على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية  
قياسها ٦٠° ، إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس  
زاوية ميله على الأفقى ٣٠°  
فأوجد معامل الاحتكاك بين القضيب  
و الأرض و رد فعل كل من المستوى  
و الأرض



نفرض أن : طول القضيب =  $l$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن

**الحل**



نفرض أن : طول القضيب =  $l$  ، و أن القضيب  
يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

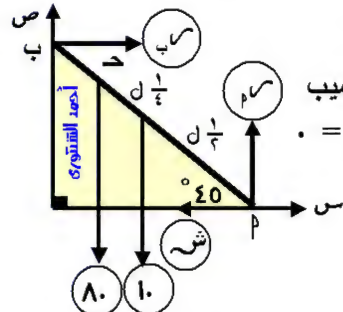
$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

(١١) سلم منتظم وزنه ٦٤ ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى

أملس و بطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس و حفظ السلم فى  
رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة  
حبل مثبت فى قاعدة السلم و فى نقطة من المستوى تقع رأسياً أسفل  
قمة السلم ، وقف رجل وزنه يساوى وزن السلم على موضع من  
السلم يبعد  $\frac{3}{4}$  طول السلم من ناحية القاعدة

ثانياً : أقصى قيمة للشد التى يتحملها الحبل علماً بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم

**الحلـ**



نفرض أن : طول القضيب =  $l$   
 أولاً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
 ∴ القضيب متزن ∴  $\sum M = 0$  ∴  $\sum F_x = 0$  ∴  $\sum F_y = 0$

$$\therefore \sum M = 0 \quad (1) \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

و هو قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع  $\frac{3}{4}$  طول السلم

ثانياً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
 ∴ القضيب متزن

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

و هى أقصى قيمة للشد يتحملها الحبل عندما يصل الرجل لقمة السلم

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

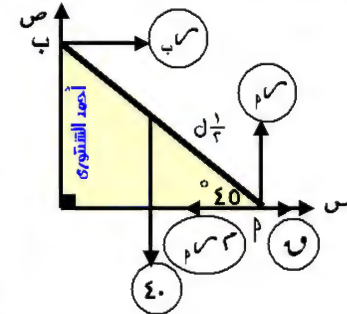
$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

$$\therefore \sum M = 0 \quad \therefore \sum F_x = 0 \quad \therefore \sum F_y = 0$$

(١٤) يرتكز قضيب منتظم وزنه ٤٠ نيوتن بطرفه  $p$  على أرض أفقية خشنة و بطرفه  $b$  على حائط رأسى أملس بحيث يكون القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها  $٤٠^\circ$  ، أوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف  $p$  للقضيب لكى تجعله على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط علماً بأن معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض  $0.7$ .



الحلـ

نفرض أن : طول القضيب  $L$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن  $\therefore \sum M = 0$

$$\therefore \sum M = 0 \Rightarrow 40 \times \frac{L}{2} - W \times \frac{L}{2} = 0$$

$$\therefore 40 = W \quad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 40 - F = 0 \Rightarrow F = 40 \text{ نيوتن} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 40 \times \frac{L}{2} \times \sin 40^\circ - W \times \frac{L}{2} \times \cos 40^\circ = 0$$

$$\therefore 40 \times \frac{L}{2} \times \sin 40^\circ = W \times \frac{L}{2} \times \cos 40^\circ \Rightarrow \frac{40}{2} \times \sin 40^\circ = \frac{W}{2} \times \cos 40^\circ$$

$$\therefore 20 \times \sin 40^\circ = W \times \cos 40^\circ \Rightarrow W = \frac{20 \times \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 20 \times \tan 40^\circ = 16.76 \text{ نيوتن} \quad (3)$$

بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج :  $40 = 16.76 + 0.7 \times 40$   
 $\therefore 40 = 16.76 + 28 \Rightarrow 40 = 44.76$   
 $\therefore 40 = 44.76$  وهو معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض عندما يكون على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط

(١٥) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى أفقى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى على مستوى خشن أفقى بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها  $\frac{3}{4}$  أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب و المستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحلـ

نفرض أن : طول القضيب  $L$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
القضيب متزن  $\therefore \sum M = 0$   
 $\therefore \sum M = 0 \Rightarrow 40 \times \frac{L}{2} - W \times \frac{L}{2} = 0$   
 $\therefore 40 = W$   
 $\therefore \sum F_x = 0 \Rightarrow 40 - F = 0 \Rightarrow F = 40 \text{ نيوتن}$   
 $\therefore \sum F_y = 0 \Rightarrow 40 \times \frac{L}{2} \times \sin 40^\circ - W \times \frac{L}{2} \times \cos 40^\circ = 0$   
 $\therefore 40 \times \frac{L}{2} \times \sin 40^\circ = W \times \frac{L}{2} \times \cos 40^\circ$   
 $\therefore \frac{40}{2} \times \sin 40^\circ = \frac{W}{2} \times \cos 40^\circ$   
 $\therefore 20 \times \sin 40^\circ = W \times \cos 40^\circ$   
 $\therefore W = \frac{20 \times \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 20 \times \tan 40^\circ = 16.76 \text{ نيوتن}$   
بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج :  $40 = 16.76 + 0.7 \times 40$   
 $\therefore 40 = 16.76 + 28 \Rightarrow 40 = 44.76$   
 $\therefore 40 = 44.76$  وهو معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض عندما يكون على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط

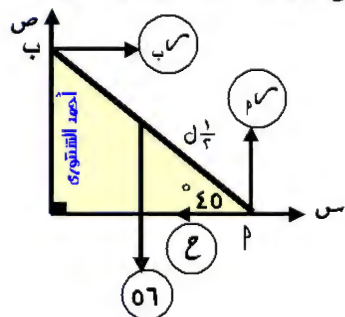
بالقسمة  $\div L$  حتا  $\theta$  ينتج :  $\frac{1}{2} \times 40 \times \sin 40^\circ = \frac{1}{2} \times W \times \cos 40^\circ$   
 $\therefore 20 \times \sin 40^\circ = W \times \cos 40^\circ$   
 $\therefore W = \frac{20 \times \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 20 \times \tan 40^\circ = 16.76 \text{ نيوتن}$   
بالتعويض من (٢) ، (٣) فى (١) ينتج :  $40 = 16.76 + 0.7 \times 40$   
 $\therefore 40 = 16.76 + 28 \Rightarrow 40 = 44.76$   
 $\therefore 40 = 44.76$  وهو معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض عندما يكون على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط

أحمد الشنتوي

(١٦)  $p$  قضيب منتظم وزنه ٥٦ نيوتن يرتكز بطرفه  $p$  على حائط رأسى أملس و بطرفه  $b$  على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى و يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها  $٤٠^\circ$  أثبت أنه فى حالة اتزان القضيب معامل الاحتكاك  $0.5 \leq$  ، و إذا كان معامل الاحتكاك  $0.7$  ، فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند  $b$  و تجعله على وشك الحركة :

أولاً : نحو الحائط  
ثانياً : بعيداً عن الحائط

الحلـ



نفرض أن : طول القضيب  $L$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب





## حل تمارين عامة صفحة ٧٤ بالكتاب المدرسى

(١) يرتكز قضيب غير منتظم  $P$  بطوله  $14$  سم بطرفه  $B$  على أرض أفقية و بطرفه  $P$  على حائط رأسى ، إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب و كل من الأرض و الحائط يساوى  $\frac{1}{4}$  ،  $\frac{1}{4}$  على الترتيب و كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى  $40^\circ$  فأوجد بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف  $B$

الحل

نفرض أن : مركز ثقل القضيب على بعد  $L$  من  $B$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
∴ القضيب متزن ∴  $\sum M = 0$   
∴  $M_P - M_B = 0$   
∴  $M_P = M_B$  (١)

∴  $\sum F_x = 0$  ∴  $M_P + M_B - W = 0$   
∴  $W = M_P + M_B$  ، بالتعويض من (١) ينتج :  
∴  $W = M_P + M_B = \frac{1}{4} M_P + \frac{1}{4} M_B$  (٢)  
∴  $W = \frac{1}{4} M_P + \frac{1}{4} M_B$  ، ج  $\sum F_y = 0$   
∴  $W \times L \text{ حتا } 40^\circ - M_P \times 14 \times \sin 40^\circ - M_B \times 14 \times \cos 40^\circ = 0$   
∴  $W \times L \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M_P \times 14 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_B \times 14 \times \frac{1}{2}$   
∴  $W \times L = \frac{1}{4} M_P \times 14 + \frac{1}{4} M_B \times 14$   
∴  $W \times L = \frac{1}{4} M_P \times 14 + \frac{1}{4} M_B \times 14$   
بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :  $\frac{1}{4} M_P \times 14 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M_B \times 14 \times \frac{1}{2}$   
∴  $L = 8$  أى أن : بعد مركز ثقل القضيب عن الطرف  $B = 8$  سم

(٢)

$P$  قضيب منتظم طوله  $26$  سم و وزنه  $43$  نيوتن يرتكز بطرفه  $P$  على حائط رأسى و بطرفه  $B$  على أرض أفقية و كان معامل الاحتكاك بين القضيب و كل من الحائط و الأرض يساوى  $\frac{1}{4}$  ،  $\frac{1}{4}$  على الترتيب و كان الطرف  $B$  يبعد  $10$  سم عن الحائط ، أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت فى الطرف  $B$  جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

الحل

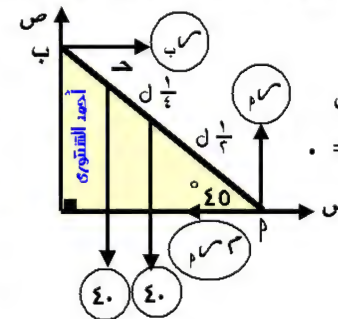
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
من هندسة الشكل :  $W = 26$  سم  
∴ القضيب متزن ∴  $\sum M = 0$   
∴  $M_P - M_B = 0$   
∴  $M_P = M_B$  (١)  
∴  $M_P = M_B$  (٢)

∴  $\sum F_x = 0$  ∴  $M_P + M_B - W = 0$   
∴  $W = M_P + M_B$  ، بالتعويض من (١) ينتج :  
∴  $W = M_P + M_B = \frac{1}{4} M_P + \frac{1}{4} M_B$  (٢)  
∴  $W = \frac{1}{4} M_P + \frac{1}{4} M_B$  ، ج  $\sum F_y = 0$   
∴  $W \times L \text{ حتا } \theta - M_P \times 26 \times \sin \theta - M_B \times 26 \times \cos \theta = 0$   
∴  $W \times L \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M_P \times 26 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} M_B \times 26 \times \frac{1}{2}$   
∴  $W \times L = \frac{1}{4} M_P \times 26 + \frac{1}{4} M_B \times 26$   
بالتعويض من (١) ، (٢) ينتج :  $\frac{1}{4} M_P \times 26 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} M_B \times 26 \times \frac{1}{2}$   
∴  $L = 10$  نيوتن (٣)  
∴  $L = 10$  نيوتن (٤)  
بالتعويض من (٣) ، (٤) فى (١) ينتج :  $W = 10 + 26 \times \frac{1}{4} = 32.75$   
∴  $W = 32.75$  نيوتن و هى القوة أفقية تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

(٣)

يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس و بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة  $\frac{3}{4}$  طول السلم أوجد معامل الاحتكاك بين الأرض و السلم ، و إذا أراد الولد أن يتم صعود السلم فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك

الحل



نفرض أن : طول القضيب =  $L$   
أولاً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∴ القضيب متزن ∴  $S = 0$  ∴  $0 = 40 - 40 - 40$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad (1)$$

$$S = 40 - 40 - 40 \quad \therefore S = 40$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

و هو معامل الاحتكاك بين الأرض السلم

ثانياً : الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب ∴ القضيب متزن

$$\therefore S = 0 \quad \therefore 0 = 40 - 40 + 40$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من صعود السلم

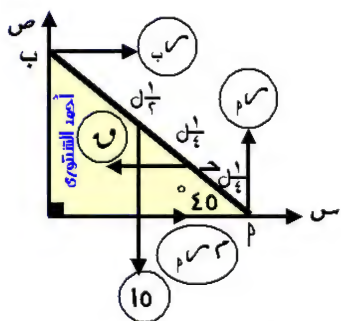
(٤) ب قضيب منتظم وزنه ١٥ ث كجم يرتكز بطرفه  $P$  على أرض أفقية

و بطرفه  $B$  على حائط رأسى أملس بحيث يقع القضيب فى مستوى رأسى عمودى على الحائط و يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، أثرت قوة أفقية  $V$  عند نقطة  $D$  من القضيب بحيث  $P$  ح يساوى  $\frac{1}{4}$  طول القضيب فأصبح الطرف  $P$  على وشك الحركة نحو

الحائط إذا كان معامل الاحتكاك بين القضيب و الأرض يساوى  $\frac{1}{4}$

أوجد القوة  $V$  و رد فعل الحائط

الحل



نفرض أن : طول القضيب =  $L$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

∴ القضيب متزن ∴  $S = 0$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$

$$\therefore 40 = 40 + 40 \quad \therefore 40 = 80$$



،  $\therefore \text{طا } \theta = \frac{4}{5}$  ،  $\therefore \text{طتا } \theta = \frac{3}{5}$  ، و القسمة  $\div$  و ينتج :

$$٢ \text{ ل} = \frac{3}{5} \times \text{ل} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \text{ ل} - \frac{1}{5} \text{ ل}$$

$$\therefore ٢ \text{ ل} = \text{ل} \therefore \text{ل} = \frac{1}{5} \text{ ل}$$

أى أن : الرجل لا يمكنه الصعود من  $\frac{1}{5}$  طول السلم دون أن يختل التوازن

(٦) قضيب منتظم وزنه ( و ) يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن

و بطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة و كان معامل الاحتكاك بين

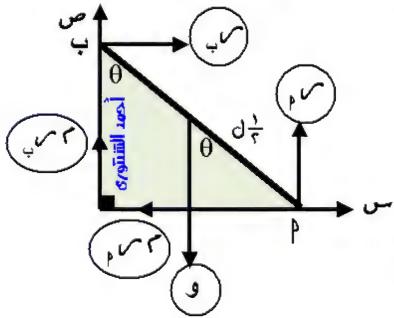
القضيب و الحائط يساوى  $\frac{1}{4}$  ، و معامل الاحتكاك بين القضيب و

الأرض يساوى  $\frac{1}{3}$  فإذا أُنزل القضيب فى مستوى رأسى عمودى على

الحائط فأوجد ظل زاوية ميل القضيب على الرأسى عندما يكون القضيب

على وشك الانزلاق

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل  
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
 $\therefore$  القضيب متزن  $\therefore \sum M = 0$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$  ، بالتعويض من (١) ينتج :

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

بالقسمة  $\div$  ل حا  $\theta$  ، التعويض عن  $M_1$  ينتج :

$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$  ، من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج :

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

(٥) سلم منتظم يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى خشن و بطرفه الآخر

على أرض أفقية خشنة و كان معامل الاحتكاك بين السلم و كل من

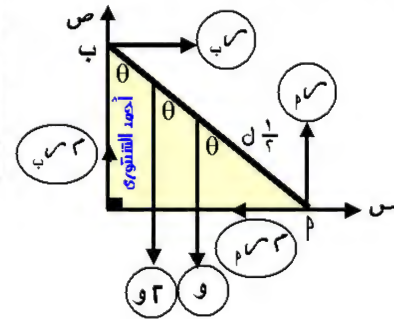
الحائط و الأرض يساوى  $\frac{1}{4}$  فإذا أُنزل السلم فى مستوى رأسى عمودى

على الحائط فى وضع يميل على الحائط بزاوية ظلها  $\frac{4}{5}$  ، برهن أن

رجلاً وزنه يساوى ضعف وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من  $\frac{1}{5}$

طول السلم دون أن يختل التوازن

الحل



نفرض أن : طول القضيب = ل  
و أن أقصى مسافة يصعد بها الرجل السلم = ل  
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
 $\therefore$  القضيب متزن  $\therefore \sum M = 0$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

من (١) ، (٢) ينتج :  $\frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$  و  $\frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$

بالقسمة  $\div$  حا  $\theta$  ، التعويض عن  $M_1$  ينتج :

$$\therefore \sum M = 0 \therefore M_1 = M_2 + M_3 \therefore \frac{1}{3} \text{ ل} = \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{3} \text{ ل}$$



## حل اختبار تراكمى صفحة ٧٥ بالكتاب المدرسى

نذكرها يلي :

[1] إذا أُنزِلَ جسم جاسئ نحت تأثير قوتين فإنه يمكن نقل نقطة تأثير أى من القوتين إلى نقطة أخرى على خط عملها دون أن يؤثر ذلك فى اتزان الجسم

[2] قاعدة مثلث القوى :

إذا أُنزِلت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و رسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل القوى الثلاث و فى إتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تتناسب مع مقادير القوى المناظرة

[3] قاعدة لامي :

إذا أُنزِلت ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخرين  
[4] إذا أُنزِلَ جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية و مستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة

(1) ثلاث قوى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت المجموعة متزنة فما قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين

الحل

∴ المجموعة متزنة ∴  $U_1 = 0$  ،  $U_2 = 6$  ،  $U_3 = 4$

و محصلتهما :  $E = 4$ 

∴  $E = U_1 + U_2 + U_3 = 0 + 6 + 4$  ،

∴  $16 = 0 + 6 + 4$  ، ومنها :

حتاى  $-\frac{3}{4} = \gamma$  ∴  $\gamma = 143^\circ$

أى أن : قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين هي  $143^\circ$

(2) أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها  $30^\circ$  مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط أوجد مقدار القوة و مقدار الشد فى الخيط

الحل

∴ كرة البندول متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة

∴ من قاعدة لامي يكون :  $\frac{U}{\sin 30^\circ} = \frac{600}{\sin 120^\circ} = \frac{U}{\sin 30^\circ}$

∴  $U = \frac{600 \times \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = 300$  ث جم

،  $\frac{U}{\sin 30^\circ} = \frac{600}{\sin 120^\circ} = \frac{U}{\sin 30^\circ}$  ،  $U = 300$  ث جم

حل آخر

∴ كرة البندول متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة و أضلاع المثلث  $\Delta P$  د توازى خطوط عمل القوى و فى اتجاه دورى واحد

∴ المثلث  $\Delta P$  د هو مثلث القوى و هو مثلث ثلاثينى ستينى

∴  $P : 36 : 1 = 1 : 36 : 2$

∴  $\frac{U}{36} = \frac{1}{1} = \frac{600}{2}$

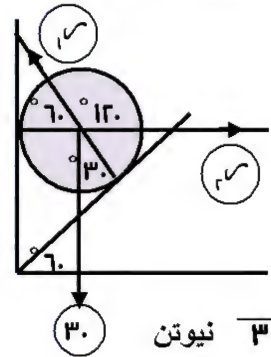
∴  $U = 300$  ث جم ،  $U = 300$  ث جم

(3) علق ثقل وزنه ٢٦ نيوتن بخيطين طولهما ٢٥ سم ، ٦٠ سم ، و ثبت الطرفان الآخران للخيطين فى نقطتين من خط أفقى البعد بينهما ٦٥ سم ، أوجد الشد فى كل من الخيطين

الحل



(٥) كرة مصمتة وزنها ٣٠ ثجم تستند بسطحها على مستويين ، فإذا كانت الكرة فى حالة اتزان بين مستويين أملسين أحدهما رأسى و الآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° ، أوجد مقدار قوتى الضغط على كل من المتويين



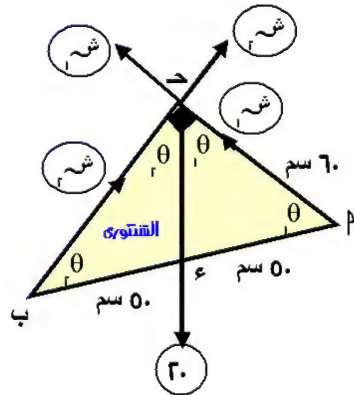
الحل :- الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية :- خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة ، و بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{R_1}{\sin 120^\circ} = \frac{R_2}{\sin 90^\circ} = \frac{30}{\sin 10^\circ}$$

$$\therefore R_1 \times \sin 120^\circ = 30 \times \sin 90^\circ \therefore R_1 = \frac{30 \times 1}{\sin 120^\circ} = 34.64 \text{ نيوتن}$$

$$R_2 \times \sin 10^\circ = 30 \times \sin 120^\circ \therefore R_2 = \frac{30 \times \sin 120^\circ}{\sin 10^\circ} = 10.39 \text{ نيوتن}$$

(٦) قضيب منتظم طوله ١٠ سم و وزنه ٢٠ نيوتن ( يؤثر فى منتصفه ) علق القضيب من طرفيه بخيطين خفيفين ثبت طرفاهما من نقطة فى سقف حجرة ، إذا كان الخيطان متعامدان و طول أحدهما ٦ سم ، أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين عندما يكون القضيب معلق تعليقاً حراً و فى حالة توازن



الحل :- الكرة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية :- خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة و من هندسة الشكل : بـ حـ = ٨٠ سم ، و بتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{R_2}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{R_2}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{R_2}{\sin 90^\circ} = \frac{20}{\sin 90^\circ}$$

المجموعة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة :- من قاعدة لامى يكون :

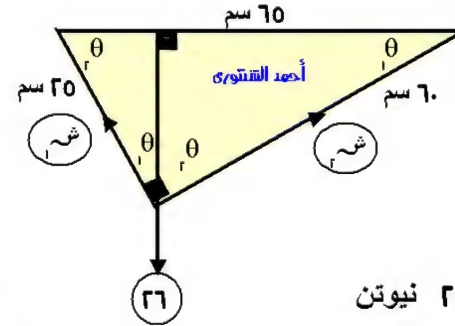
$$\frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{26}{\sin 180^\circ - \theta}$$

$$\frac{R_2}{\sin 180^\circ - \theta} = \frac{R_1}{\sin 90^\circ}$$

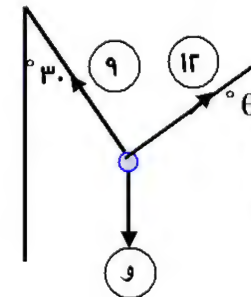
$$\therefore \frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{R_2}{\sin 90^\circ} = \frac{26}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore R_1 = 26 \times \sin 90^\circ = 26 \times 1 = 26 \text{ نيوتن}$$

$$R_2 = 26 \times \sin 90^\circ = 26 \times 1 = 26 \text{ نيوتن}$$



(٤) علق ثقل وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسى بزاويتين قياسيهما theta° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن و الشد فى الخيط الثانى ٩ نيوتن أوجد قيمة الوزن (و) و قياس الزاوية theta



الحل :- المجموعة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى مستوية و متلاقية فى نقطة :- من قاعدة لامى يكون :

$$\frac{W}{\sin 10^\circ} = \frac{9}{\sin 180^\circ - \theta} = \frac{12}{\sin 30^\circ + \theta}$$

$$\therefore 12 \times \sin 10^\circ = 9 \times \sin 180^\circ - \theta$$

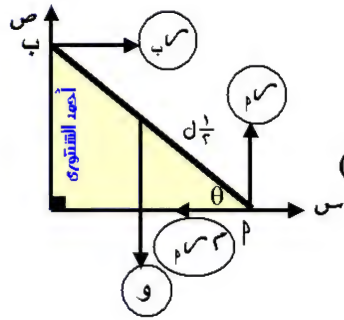
$$\therefore 12 \times \sin 10^\circ = 9 \times \sin 180^\circ - \theta$$

$$12 \times \sin 10^\circ = 9 \times \sin 180^\circ - \theta$$

$$\therefore 12 \times \sin 10^\circ = 9 \times \sin 180^\circ - \theta$$

(٨) قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه و بين القضيب و المستوى  $\frac{1}{4}$  ، أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق

الحل



نفرض أن : طول القضيب =  $L$   
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
∴ القضيب متزن ∴  $S = W$

$$\begin{aligned} \therefore S \cdot L - W \cdot \frac{L}{2} &= 0 \quad \therefore S = \frac{W}{2} \quad (1) \\ S &= W \quad \therefore W = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

∴ من (1) ، (2) ينتج :  $S = \frac{W}{2}$  و (3)

$$W = \frac{W}{2} \times L \times \cos \theta - \frac{W}{2} \times L \times \sin \theta$$

بالقسمة ÷  $L \cos \theta$  ، و التعويض من (3) ينتج :  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \tan \theta$

$$\therefore \tan \theta = 2$$

(٩) ب سلم منتظم وزنه ١٤ ث كجم يرتكز بطرفه  $M$  على أرض أفقية خشنة ، و يرتكز بطرفه  $B$  على حائط رأسى خشن و كان معامل الاحتكاك بين السلم و الأرض  $\frac{3}{7}$  و معامل الاحتكاك بين السلم و الحائط  $\frac{1}{4}$  فإذا أُنزل السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط

عندما كان يميل على الأفقى بزاوية  $20^\circ$  فأوجد مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند الطرف  $M$  جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

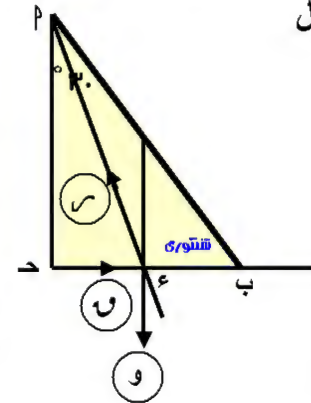
الحل

$$\therefore \text{شـ}_1 = 20 \times \cos \theta = 12 \text{ نيوتن}$$

$$\text{شـ}_2 = 20 \times \sin \theta = 16 \text{ نيوتن}$$

(٧) ب قضيب منتظم ( وزنه يؤثر فى منتصفه ) مثبت بطرفه  $M$  فى حائط رأسى بواسطة مفصل ، جذب القضيب أفقياً بقوة مقدارها  $W$  ث كجم حتى اتزن القضيب فى وضع يصنع فيه زاوية قياسها  $30^\circ$  مع الرأسى ، أوجد  $W$  ، و رد فعل المفصل

الحل



نفرض أن : طول القضيب =  $L$   
∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية  
∴ خطوط عمل القوى الثلاثة تتلاقى فى نقطة واحدة

و من هندسة الشكل :  $B = \frac{1}{2} L$

$$D = \frac{1}{2} L, \quad \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L$$

$$E = \frac{1}{2} L, \quad \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L$$

$$\therefore \frac{W}{D} = \frac{P}{E} = \frac{W}{D}$$

$$\therefore W \times D = P \times E \quad \therefore W \times \frac{1}{2} L = P \times \frac{1}{2} L$$

$$\therefore \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L$$

$$\therefore W \times \frac{1}{2} L = P \times \frac{1}{2} L \quad \therefore W \times \frac{1}{2} L = P \times \frac{1}{2} L$$

$$\therefore \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L$$

$$ص = ٠ \quad \therefore ٠ = ٢٠ - ٣٠ \quad \therefore ٢٠ = ٣٠ \quad (٢)$$

$$\text{من (١) ، ينتج : } ٠ = ٣٠ \quad ، \quad ٠ = ٤٠$$

$$\therefore ٠ = ٤٠ = ٣ \times ٢٠ - ٨ \times ٠ = ٨ \times ٣٠ - ٣ \times ٢٠ = ٨ \times ٠ \neq ٢٠$$

$\therefore$  لا يمكن أن يتزن السلم عندما يكون الطرف ب يبعد ٨ متر من سطح الأرض

(١١) ب سلم منتظم وزنه ٩ ث كجم يرتكز بطرفه م على أرض أفقية خشنة

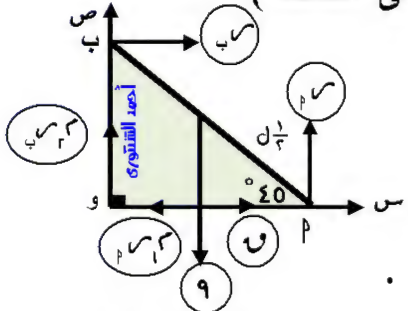
و بطرفه ب على حائط خشن فإذا كان معامل الاحتكاك عند م ، ب

هما  $\frac{١}{٤}$  ،  $\frac{١}{٤}$  على الترتيب ثم شد الطرف م بقوة أفقية  $١٠$  جعلت

السلم على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط و كان السلم يصنع مع

الأفقى زاوية قياسها  $٤٥^\circ$  أوجد مقدار  $١٠$

( السلم فى مستوى رأسى عمودى على الحائط )



نفرض أن : طول القضيب = ل  
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب  
 $\therefore$  القضيب متزن  $\therefore ٠ = ٠$

$$\therefore ٠ = ٣٠ - ٩ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (١)$$

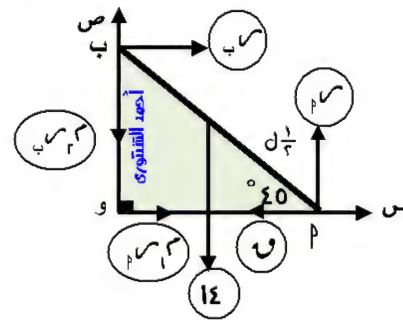
$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (٢)$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠$$

$$\text{بالقسمة } ٠ \div \text{حدا } ٤٥^\circ \text{ ينتج : } \therefore \frac{٩}{٤} = \frac{٣٠}{٤} + \frac{١٠}{٤}$$

$$\therefore \frac{٩}{٤} = \frac{٣٠}{٤} + \frac{١٠}{٤} \quad \text{و منها : } ٣ = ٣٠ \quad \text{ث كجم ، من (٢) ينتج :}$$

$$\therefore ٣ = ٣٠ \quad \text{ث كجم ، من (١) ينتج : } \therefore \frac{١٣}{٤} = ١٠ \quad \text{ث كجم}$$



نفرض أن : طول القضيب = ل  
الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

$\therefore$  القضيب متزن  $\therefore ٠ = ٠$

$$\therefore ٠ = ٣٠ - ٩ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (١)$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (٢)$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (٣)$$

$$\text{من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : } ١٠ + (١٢ + ١٠ \times \frac{١}{٤}) \times \frac{٣}{٤} = ١٠$$

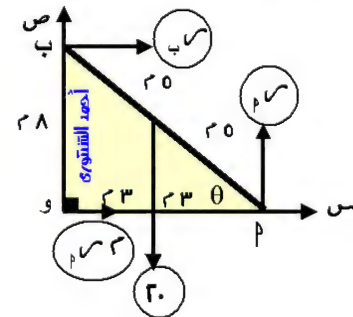
$١٨ = ١٠$  ث كجم و هى القوة أفقية تجعل القضيب على وشك الحركة نحو الحائط

(١٠) ب سلم منتظم طوله ١٠ متر و وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بطرفه م على

أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينها و بين السلم  $\frac{١}{٤}$  ، و بطرفه

ب على حائط أملس أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن عندما يكون

الطرف ب يبعد ٨ متر من سطح الأرض



الشكل المقابل يبين القوى المؤثرة على القضيب

، من هندسة الشكل :  $٦ = ٦$

نفرض أن : القضيب متزن  $\therefore ٠ = ٠$

$$\therefore ٠ = ٣٠ - ٩ + ١٠ = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٩ - ٣٠ + ١٠ = ٠ \quad (١)$$



## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٥) إذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها

حول أى نقطة فى المستوى يساوى ....

(٥) ثابت غير صفري (ب) صفر

(د) محصلة هذه القوى (٤) الواحد الصحيح

الحل

صفر

## السؤال الرابع :

(١) ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من

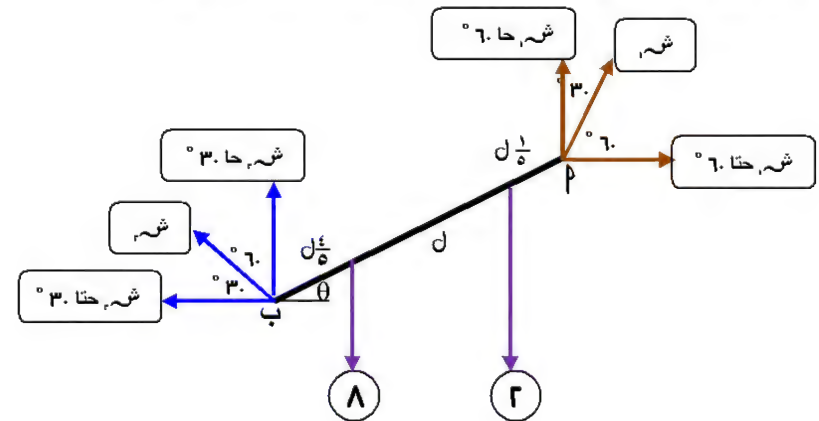
طرفيه ٣ ، ب يميلان على الرأسى بزوايتين ٣٠° ، ٦٠° على

الترتيب ، علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من

٣ يساوى ١ ل ، ٥ ل أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد

فى الخيطين و قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى

الحل



∴ القضيب متزن ∴ معادلات الاتزان هى :

$$\text{شـمـ} \text{ حـتا } ٦٠^\circ = \text{شـمـ} \text{ حـا } ٣٠^\circ$$

$$\text{∴ شـمـ} \times \frac{١}{٢} = \text{شـمـ} \times \frac{٣}{٢} \quad \text{∴ شـمـ} = ٣ \text{ شـمـ} \quad (١)$$

$$\text{شـمـ} \text{ حـا } ٦٠^\circ + \text{شـمـ} \text{ حـتا } ٣٠^\circ = ٨ + ٢$$

$$\text{∴ شـمـ} \times \frac{٣}{٢} + \text{شـمـ} \times \frac{١}{٢} = ١٠ \quad \text{بالتعويض من (١) ينتج :$$

$$\text{∴ شـمـ} \times \frac{٢}{٢} + \text{شـمـ} \times \frac{١}{٢} = ١٠ \quad \text{∴ شـمـ} = ٢$$

$$\text{∴ شـمـ} = ٥ \text{ وحدة وزن}$$

، بالتعويض فى (١) ينتج : شـمـ = ٥ وحدة وزن

، بفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$

$$\therefore \text{عـ} = ٥$$

$$\text{∴ شـمـ} \text{ حـا } ٦٠^\circ \times ٢ \text{ ل حـتا } \theta - \text{شـمـ} \text{ حـتا } ٦٠^\circ \times ٢ \text{ ل حـا } \theta$$

$$- \text{∴ شـمـ} \times \frac{١}{٢} \times ٨ - \text{شـمـ} \times \frac{٣}{٢} \times ٢ \text{ ل حـتا } \theta = ٥$$

$$\text{∴ شـمـ} \times \frac{١}{٢} \times ٨ - \text{شـمـ} \times \frac{٣}{٢} \times ٢ \text{ ل حـتا } \theta = ٥$$

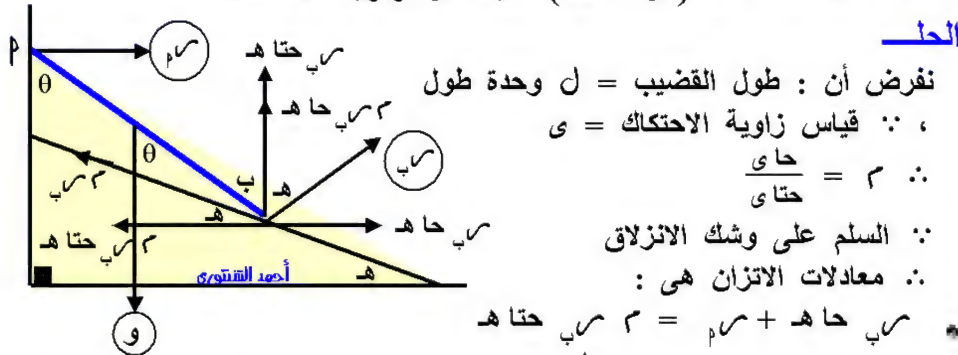
$$- \text{∴ شـمـ} \times \frac{١}{٢} \times ٨ - \text{شـمـ} \times \frac{٣}{٢} \times ٢ \text{ ل حـتا } \theta = ٥$$

، بالقسمة ÷ ل حـتا  $\theta$  ينتج :

$$٥ = \frac{٣٢}{٢} - \frac{١٨}{٢} - \theta$$

$$\text{∴ شـمـ} = ٥ \quad \text{∴ شـمـ} = ٥ \quad \text{∴ شـمـ} = ٥$$

اثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها  $\theta$  حيث :  
طا  $\theta = \theta$  طا (ى - هـ) حيث ى زاوية الاحتكاك



نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول  
∴ قياس زاوية الاحتكاك = ى  
∴  $\frac{\text{حاي}}{\text{حاي}} = \text{س}$   
∴ السلم على وشك الانزلاق  
∴ معادلات الاتزان هي :

$$\text{س} \text{ حاه} + \text{س} \text{ حاه} = \text{س} \text{ حاه}$$

$$\text{س} \text{ حاه} + \text{س} \text{ حاه} = \text{س} \text{ حاه} \quad \text{بالمضرب} \times \text{حاي} \text{ ينتج :}$$

$$\text{س} \text{ حاي} = \text{س} \text{ حاي} - \text{س} \text{ حاي} \text{ حاه}$$

$$\text{س} \text{ حاي} = \text{س} \text{ حاي} - \text{س} \text{ حاي} \text{ حاه} \quad (1)$$

$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه} + \text{س} \text{ حاه}$$

$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه} + \text{س} \text{ حاه} \quad \text{بالمضرب} \times \text{حاي} \text{ ينتج :}$$

$$\text{و} \text{ حاي} = \text{س} \text{ حاي} - \text{س} \text{ حاه} \text{ حاي}$$

$$\text{و} \text{ حاي} = \text{س} \text{ حاي} - \text{س} \text{ حاه} \text{ حاي} \quad (2)$$

$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه}$$

$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه} - \text{س} \text{ حاه} \times \text{ل} \text{ حاه} \quad \text{بالقسمة} \div \text{ل} \text{ حاه} \text{ ينتج :}$$

$$\text{و} \text{ طا} \theta = \text{س} \text{ حاه}$$

$$\text{و} \text{ حاي} \text{ طا} \theta = \text{س} \text{ حاه} \quad \text{بالتعويض من (1) ، (2) ينتج :}$$

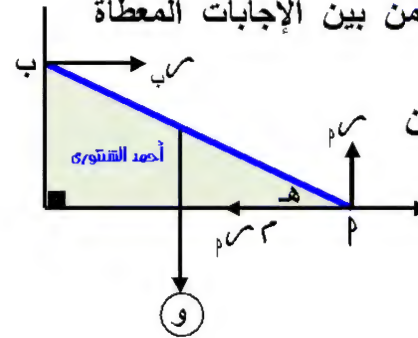
$$\text{س} \text{ حاي} \text{ طا} \theta = \text{س} \text{ حاه} \text{ طا} \theta$$

$$\text{س} \text{ حاي} \text{ طا} \theta = \text{س} \text{ حاه} \text{ طا} \theta$$

$$\text{و} \text{ طا} \theta = \text{س} \text{ حاه} \text{ طا} \theta$$

## الاختبار الثانى

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(0) فى الشكل المقابل :



إذا كانت ل هي زاوية الاحتكاك بين  
الأرض و القضيب

فإن : طا هـ . طا ل = ....

$$\frac{1}{\theta} \quad (ب) \quad \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{1}{\theta} \quad (د) \quad \frac{1}{\theta}$$

الحل

∴ القضيب متزن

$$\text{س} \text{ حاه} = \text{س} \text{ حاه} \quad (1) \quad \text{و} = \text{س} \text{ حاه}$$

و بفرض أن : طول القضيب = س وحدة طول

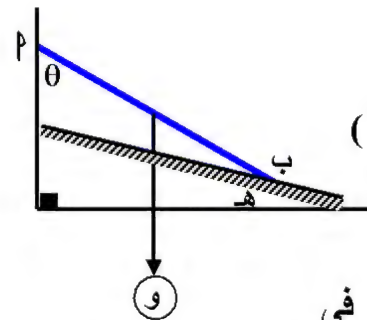
$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه} \quad \text{و} \times \frac{1}{\theta} = \text{س} \text{ حاه} - \text{س} \text{ حاه} \times \text{س} \text{ حاه} = \text{و}$$

وبالقسمة على س حاه ينتج : و = س حاه طا هـ ∴ من (2) ينتج :

$$\text{و} = \text{س} \text{ حاه} \text{ طا ل} \quad \text{و منها ينتج : طا هـ} \cdot \text{طا ل} = \frac{1}{\theta}$$

## السؤال الرابع :

(1) فى الشكل المقابل :



ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم وزنه (و)

على حائط رأسى أملس و ترتكز النهاية

الأخرى على أرض خشنة تميل على

الأفقى بزاوية قياسها (هـ) لأعلى

فإذا كان السلم على وشك الانزلاق و هو فى

مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض

## الاختبار الثالث

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٥) عندما يوضع قضيب داخل أثناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر خط عمل الوزن ....

الحلـ

بمركز الأثناء ( الكرة )

## السؤال الرابع :

(١) ب قضيب منتظم وزنه ( و ) يرتكز باحدى طرفيه م على أرض أفقية ملساء وبطرفه الآخر ب على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها يساوى ضعف قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى وضع الاتزان حفظ اتزان القضيب بواسطة خيط مربوط فى طرف المستند على الأرض الأفقية و الطرف الآخر للخيط فى نقطة على خط تقاطع المستوى المائل مع المستوى الأفقى اوجد مقدار الشد فى الخيط وردى الفعل عند طرفى القضيب عندما يميل القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

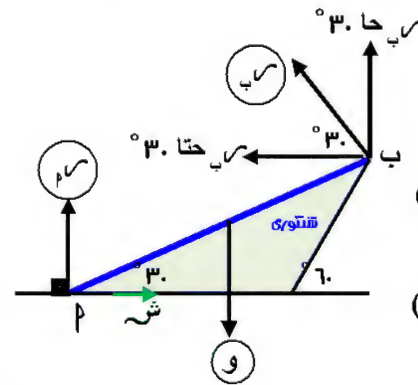
الحلـ

نفرض أن : طول القضيب = ل وحدة طول  
، ∴ القضيب متزن

$$(١) \therefore \text{ش} = \text{م} \text{ حتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ م}$$

$$\text{م} = \text{م} + \text{م} \text{ حتا } ٣٠^\circ = \text{و}$$

$$(٢) \therefore \text{م} = \frac{1}{2} \text{ م} + \text{و}$$



$$\text{ع} = \text{م}$$

$$\therefore \text{و} \times \frac{1}{2} \text{ ل حتا } ٣٠^\circ = \text{م} \text{ حتا } ٣٠^\circ \times \text{ل حتا } ٣٠^\circ + \text{م} \text{ حتا } ٣٠^\circ \times \text{ل حتا } ٣٠^\circ$$

بالقسمة على ل حتا ٣٠° ينتج :  $\frac{1}{2} \text{ و} = \text{م} + \frac{1}{2} \text{ م}$

$$\therefore \text{م} = \frac{1}{2} \text{ و} \quad \text{بالتعويض من (٢) ينتج :}$$

$$\text{م} = \frac{1}{2} \text{ و} \quad \text{و منها : } \text{م} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و}$$

$$\text{، بالتعويض من (١) ينتج : ش} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و}$$

## الاختبار الرابع

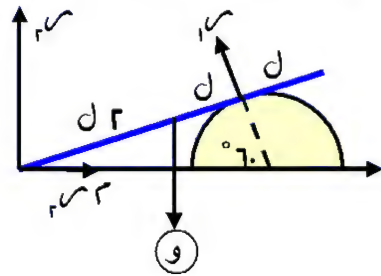
**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب على وشك الانزلاق فإن :

$$\text{م} = \text{م} \quad \text{،} \quad \text{م} = \text{م}$$

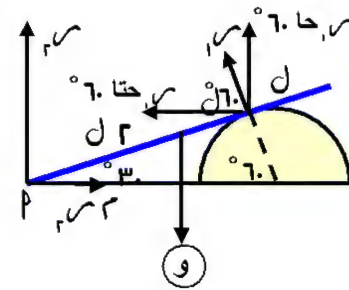
$$(ب) \frac{1}{2} \text{ و} \quad (د) \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و}$$

$$(٤) \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و} \quad (ج) \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و}$$





الحل



(٢)

∴ القضيب متزن

$$\therefore \sum \tau = 0$$

$$\therefore \frac{30}{2} \times 3 \cos 60^\circ + 10 \times 1 \cos 60^\circ = 30 \times 3 \cos 60^\circ$$

$$30 \cos 60^\circ = 30 \cos 60^\circ$$

$$\therefore 30 \cos 60^\circ = 30 \cos 60^\circ$$

$$0 = 0$$

$$\therefore 30 \cos 60^\circ \times 3 + 10 \cos 60^\circ \times 1 = 30 \cos 60^\circ \times 3$$

$$\text{و } 30 \cos 60^\circ \times 3 = 30 \cos 60^\circ \times 3 \text{ ومنها : } \frac{30}{3} = 30$$

بالتعويض فى (١) ينتج :  $\frac{1}{2} = 30$  و

السؤال الرابع :

(١) ب قضيب منتظم طرفيه م مثبت فى مفصل فى حائط رأسى و

طرفه الآخر ب مربوط بأحد طرفى خيط ، وربط الطرف الآخر

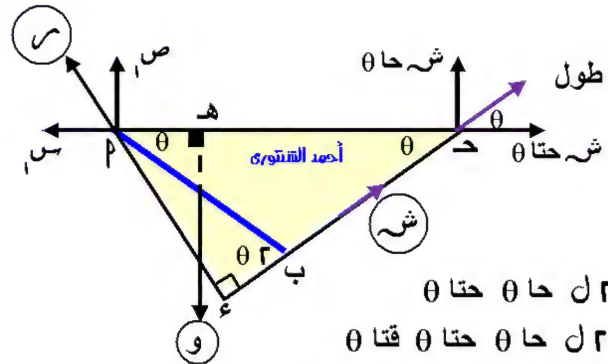
للخيط فى نقطة فى المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث يميل

كل من القضيب و الخيط على الأفقى بنفس الزاوية  $\theta$  فإذا كان

(و) وزن القضيب ، بين أن رد فعل المفصل عند م يساوى

$$\frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta}$$

الحل



نفرض أن :

طول القضيب = ل وحدة طول

، مقدار مركبتى رد فعل

المفصل عند م هما :

 $S_1$  ،  $S_2$ 

من هندسة الشكل :

$$P \cos \theta = S_1 \cos \theta \quad \text{و} \quad P \sin \theta = S_2 \sin \theta$$

$$\therefore P \cos \theta = S_1 \cos \theta \quad \text{و} \quad P \sin \theta = S_2 \sin \theta$$

$$P \cos \theta = S_1 \cos \theta \quad \text{و} \quad P \sin \theta = S_2 \sin \theta$$

∴ معادلات الاتزان هى :

$$(1) \quad S_1 \cos \theta = P \cos \theta \quad \text{و} \quad S_2 \sin \theta = P \sin \theta$$

$$S_1 \cos \theta = P \cos \theta \quad \text{و} \quad S_2 \sin \theta = P \sin \theta$$

$$S_1 \cos \theta = P \cos \theta \quad \text{و} \quad S_2 \sin \theta = P \sin \theta$$

ومنها :  $\frac{1}{2} = 30$  و  $\frac{1}{2} = 30$  ، بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

$$S_1 \cos \theta = P \cos \theta \quad \text{و} \quad S_2 \sin \theta = P \sin \theta$$

$$\therefore (S_1) = (S_2) = (P) = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 9 \cos^2 \theta}$$

## الاختبار الخامس

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٥) الشرط اللازم و الكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....  
الحل

ينعدم متجه مجموع القوى ، ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

## السؤال الرابع :

(١) م ب سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه  
م على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة  
معامل الاحتكاك بينهما  $\frac{1}{4}$  ، وكان الطرف ب على بعد ٣ متر  
من الحائط ، اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة  
ثم اوجد اصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه و بين الأرض  
 $\frac{1}{4}$  بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق

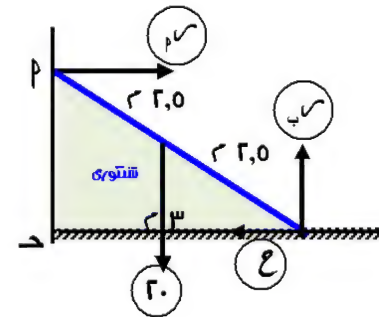
الحل

من هندسة الشكل :  $م = ٣$  سم  
بفرض أن السلم متزن :  
 $\therefore م = ع$  ،  $٢٠ = م ب$  ،  
 $ع = ٠$  ،

$$\therefore ٠ = ٤ \times م - ١,٥ \times ٢٠$$

و منها :  $م = ٧,٥$   
 $\therefore ٧,٥ = ع$

،  $\therefore$  مقدار ع عند ب = م =  $٢٠ \times \frac{1}{4} = ٥$   
 $\therefore ع < ع$  و بالتالى لا يمكن أن يتزن السلم فى هذه الحالة



بعد وضع الجسم الذى وزنه ( و ) عند ب  
بالنسبة للجسم :

$$ض = \frac{1}{5} م$$

$$، و = م$$

$$\therefore ض = \frac{1}{5} و$$

بالنسبة للسلم :

$$م = \frac{1}{4} م ب + \frac{1}{5} و ، م ب = ٢٠$$

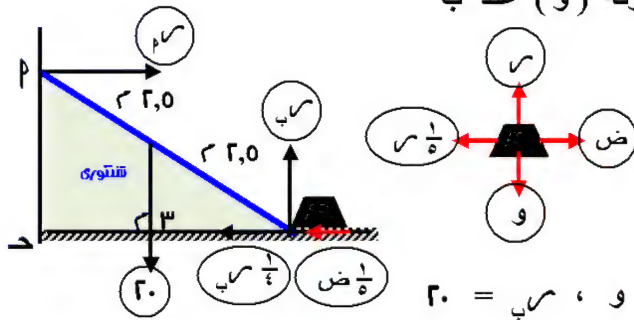
$$، ع = ٠$$

$$\therefore ٠ = ٤ \times م - ١,٥ \times ٢٠$$

$$\therefore م = ٧,٥$$

$$\therefore ٧,٥ = \frac{1}{4} \times ٢٠ + \frac{1}{5} و$$

$$و منها : و = ١٢,٥ \text{ ث كجم}$$



تم بحمد الله تعالى

أحمد الشنتوي

# المتميز

في

## الرياضيات التطبيقية الأسنانكا

الجزء النظري

٩

حلول التمارين  
الوحدة الخامسة

|| ق ||

( سيم ، صيم )

ع

أحمد

الصف الثالث الثانوي  
القسم العلمي  
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري



## الوحدة الخامسة .... الازدواجات

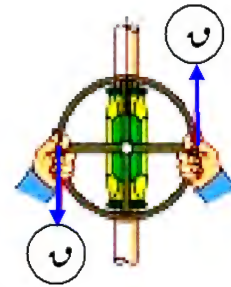
## الازدواجات

١ - ٥

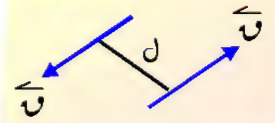
الازدواج :

تعريف : الازدواج :

- هو نظام من القوى يتكون من قوتين  
 (١) متساويتين فى المعيار  
 (٢) متضادتين فى الاتجاه  
 (٣) لا يجمعهما خط عمل واحد



أحمد الشنتوي



عزم الازدواج :

يعرف عزم الازدواج بأنه مجموع عزوم قوتى الازدواج حول أى نقطة فى الفراغ و معياره يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد بينهما

و يرمز له بالرمز  $\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}$  $\therefore \vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}$  حيث : $\vec{r} = \vec{r}$  ،  $\vec{F}$  يسمى ذراع الازدواجأى أن : معيار عزم الازدواج = معيار إحدى قوتيّه  $\times$  ذراع الازدواج

اتجاه الازدواج :

يتحدد اتجاه الازدواج وفقاً لقاعدة اليد اليمنى

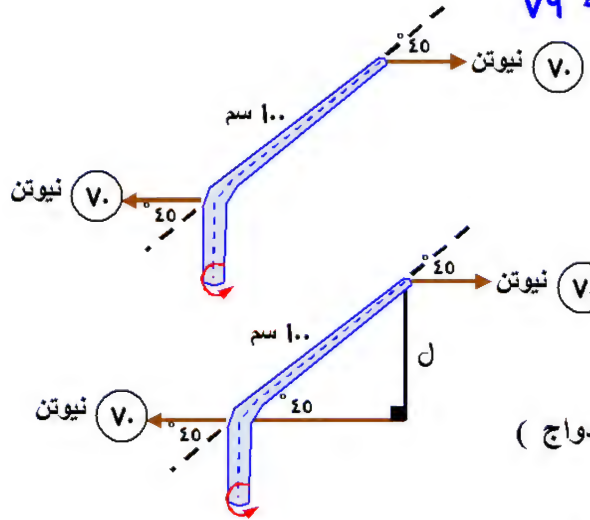
و تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج موجبة إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران ضد اتجاه حركة عقارب الساعة

أى أن :  $\vec{G} = \vec{r} \times \vec{F}$ 

و تكون إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج سالبة إذا كانت قوتاه تعملان على الدوران مع اتجاه حركة عقارب الساعة  
 أى أن :  $\vec{G} = - \vec{r} \times \vec{F}$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٧٩

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج فى الشكل المقابل



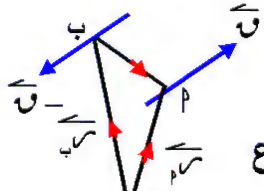
الحل

 $\vec{G} = (\text{ذراع الازدواج}) \times \vec{F}$ ١.٠ ح  $40^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1.0$  $= 0.707 \text{ سم}$  $\therefore \vec{G} = (\text{القياس الجبرى لعزم الازدواج})$  $= - 70 \times 0.707$  $= - 49.49 \text{ نيوتن. سم}$ 

نظرية :

عزم الازدواج هو قيمة ثابتة ، لا تعتمد على النقطة التى تنسب إليها عزم قوتيّه

ففى الشكل المقابل :



القوتان  $\vec{P}$  ،  $\vec{Q}$  تؤثران فى النقطتين  $P$  ،  $B$  ،  
 نقطة  $(O)$  نقطة عامة فى الفراغ فيكون مجموع عزوم القوى حول نقطة  $(O)$  :

$$\vec{G} = \vec{r}_{OP} \times \vec{P} + \vec{r}_{OB} \times \vec{Q} = \vec{r}_{OP} \times \vec{P} + (\vec{r}_{OP} + \vec{r}_{PB}) \times \vec{Q}$$

$$= \vec{r}_{OP} \times \vec{P} + \vec{r}_{OP} \times \vec{Q} + \vec{r}_{PB} \times \vec{Q}$$

أى أن : عزم الازدواج لا يعتمد على موضع نقطة ( و ) التى تنسب العزوم إليها

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٨٠

إذا كان  $\overline{Q_1}$  ،  $\overline{Q_2}$  قوتى ازدواج بحيث :  $\overline{Q_1} = -\overline{Q_2}$  ،  $\overline{Q_1}$  تؤثر فى النقطة  $M(1,1)$  ،  $\overline{Q_2}$  تؤثر فى النقطة  $B(-1,-2)$  أوجد  $\overline{Q_1}$  ثم أوجد عزم الازدواج و كذلك طول العمود المرسوم من  $M$  على خط عمل  $\overline{Q_1}$

الحل

∴ القوتان تكونان ازدواجاً ∴  $\overline{Q_1} = -\overline{Q_2}$  ،  $\overline{Q_1} = \overline{Q_2}$  ،  $\overline{Q_1} \times \overline{P} = \overline{Q_2} \times \overline{B}$  حول  $B$

$$\overline{Q_1} \times \overline{P} = \overline{Q_2} \times \overline{B} \Rightarrow \overline{Q_1} \times \overline{P} = \overline{Q_1} \times \overline{B}$$

$$(\overline{Q_1} \times \overline{P}) - (\overline{Q_1} \times \overline{B}) = 0 \Rightarrow \overline{Q_1} \times (\overline{P} - \overline{B}) = 0$$

$$\overline{Q_1} \times \overline{PB} = 0 \Rightarrow \overline{Q_1} \times (1, 1) - \overline{Q_1} \times (-1, -2) = 0$$

$$\overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2) \Rightarrow \overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2)$$

$$\overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2) \Rightarrow \overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2)$$

$$\overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2) \Rightarrow \overline{Q_1} \times (1, 1) = \overline{Q_1} \times (-1, -2)$$

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين أو أكثر :

تعريف : يقال لجسم متماسك أنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفري

إذا كان :  $\overline{G_1}$  ،  $\overline{G_2}$  عزمى الازدواجين فإن شرط اتزان الجسم تحت تأثير ازدواجين هو :  $\overline{G_1} + \overline{G_2} = \overline{0}$

أى أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين ( شرط توازن ازدواجين ) القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما  $\overline{G_1}$  ،  $\overline{G_2}$  هو :  $\overline{G_1} + \overline{G_2} = \overline{0}$  . أى :  $\overline{G_1} = -\overline{G_2}$

و بصفة عامة : إذا أثر على عدة ازدواجات مستوية عزومها :

$\overline{G_1}$  ،  $\overline{G_2}$  ، .... ،  $\overline{G_n}$  فإن شرط توازن الجسم تحت تأثير هذه الازدواجات هو :  $\overline{G_1} + \overline{G_2} + \dots + \overline{G_n} = \overline{0}$

نتيجة :

يتزن الجسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات

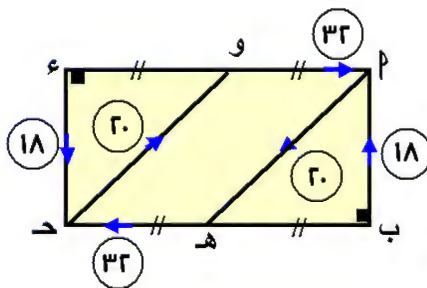
ملاحظة :

الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر

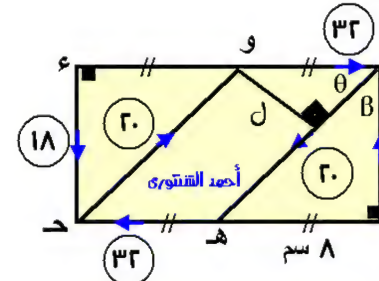
### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٨١

فى الشكل المقابل :

$M$  ب د ع مستطيل ، هـ ، و منتصفات  $\overline{BD}$  ،  $\overline{CE}$  على الترتيب ،  $\overline{P} = \overline{B}$  سم ،  $\overline{B} = \overline{D} = ١٦$  سم فإذا كانت القوى المؤثرة بالنيوتن و مقاديرها و



اتجاهاتها كما بالشكل أثبت أن القوى متزنة  
**الحل**



من هندسة الشكل :  $p = 10$  سم  
،  $p = 10$  و  $h = 8$  (  $90^\circ - \beta$  )  
،  $h = 8$  حتى  $\beta = 8 \times \frac{1}{10} = 4,8$  سم

القوتان ( ١٨ ، ١٨ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  $\Sigma = 18 \times 16 = 288$  نيوتن . سم

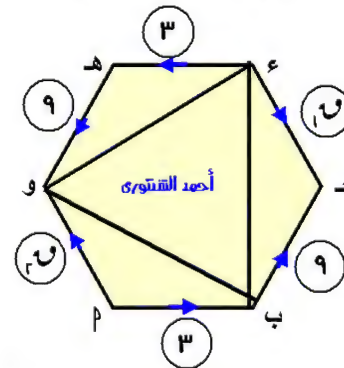
القوتان ( ٣٢ ، ٣٢ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  $\Sigma = 32 \times 6 = 192$  نيوتن . سم

القوتان ( ٢٠ ، ٢٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  $\Sigma = 20 \times 4,8 = 96$  نيوتن . سم

$\therefore \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 96 - 192 - 288 = -96$  .  $\therefore$  المجموعة متزنة

**إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٨١**

ب د ع هـ و سداسى منتظم أثرت القوى ٣ ، ٩ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، ٩  
فى الاتجاهات  $\vec{p}$  ،  $\vec{q}$  ،  $\vec{r}$  ،  $\vec{s}$  ،  $\vec{t}$  ،  $\vec{u}$  على الترتيب أوجد  
لكى تتزن المجموعة



**الحل**  
بفرض أن : طول ضلع السداسى المنتظم =  $l$   
من هندسة الشكل :  $b = e$  و  $w = e$   
 $\Sigma = 3 \times l = 3l$

القوتان ( ٣ ، ٣ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  
 $\Sigma = 3 \times 3 = 9$  نيوتن . سم

القوتان ( ٩ ، ٩ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$\Sigma = 9 \times 3 = 27 \text{ نيوتن . سم}$$

القوتان ( ٣ ، ٣ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  $\Sigma = 3 \times 3 = 9$  نيوتن . سم

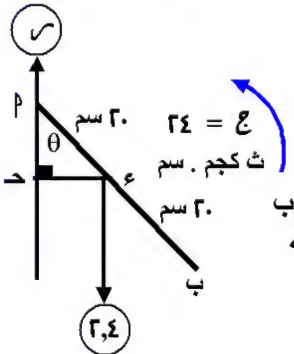
$$\Sigma = 3 \times 3 = 9 \text{ نيوتن . سم} \quad \text{حيث : } \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$$

$$\therefore \text{ المجموعة متزنة } \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 9 + 9 + 9 = 27 \text{ نيوتن . سم}$$

$$\therefore \Sigma = 27 + 27 + 27 = 81 \text{ نيوتن . سم}$$

**إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٨٢**

قضيب طوله ٤ سم و وزنه ٢٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه ، يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه ، أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم . سم و اتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه ، عين مقدار و اتجاه رد فعل المفصل و زاوية ميل ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان



$\therefore$  القضيب متزن تحت تأثير الازدواج :

$$\Sigma = 24 \text{ ث كجم . سم} \quad \text{و القوتين ( ٢٤ ، ٢٤ )}$$

و بفرض أن الازدواج يعمل فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة ،  $\therefore$  الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله

$\therefore$  القوتان ( ٢٤ ، ٢٤ ) تكونان ازدواجاً

$$\therefore \Sigma = 24 \text{ ث كجم}$$

$\therefore$  ،  $24 \text{ ث كجم}$  يؤثر رأسياً لأسفل  $\therefore$   $\Sigma$  يؤثر رأسياً لأعلى

$$\text{، القياس الجبرى لعزمهما } \Sigma = 24 \times 2 = 48 \text{ ث كجم . سم}$$

$$\Sigma = 48 \times \theta = 24 \times 2 \times \theta = 48 \theta$$

$$\therefore \Sigma = 48 \theta = 48 \theta$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \quad \text{أو} \quad 150^\circ$$



## حل تمارين ( ١ - ١ ) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة  
(١) الازدواج هو :

- (١) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و متحدتا الاتجاه  
(ب) قوتان متعامدتان و متساويتان فى المقدار  
(ج) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و على خط عمل واحد  
(٤) قوتان متوازيان و متساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه و ليستا على خط عمل واحد

(٢) أى من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم  
(١) ازالة ازدواج إلى موضع جديد فى مستواه  
(ب) ازالة ازدواج إلى مستوى آخر يوازي مستواه  
(ج) دوران ازدواج فى نفس مستواه  
(٤) كل ما سبق

(٣) القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة و تحدثان دورانا لعجلة القيادة تكونان

- (١) احتكاكاً  
(ج) قوة عمودية على عجلة القيادة  
(٤) محصلة غير صفرية  
(٤) لاحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان

(١) متساويتين فى المقدار  
(ب) متضادتين فى الاتجاه  
(ج) ليستا على خط عمل واحد  
(٤) كل ما سبق  
(٥) إذا كان ج<sub>١</sub> ، ج<sub>٢</sub> هما القياسان الجبريان لعزى ازدواجين و كان

$$ج_١ + ج_٢ = ٠ \text{ فإن}$$

- (١) الازدواجان متكافئان  
(ب) الازدواجان غير متزنين  
(ج) الازدواجان متزنان  
(٤) الازدواجان يكافئان قوة

تكافؤ ازدواجين :

تعريف : يقال لازدواجين مستويين أنهما متكافئان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزيمهما

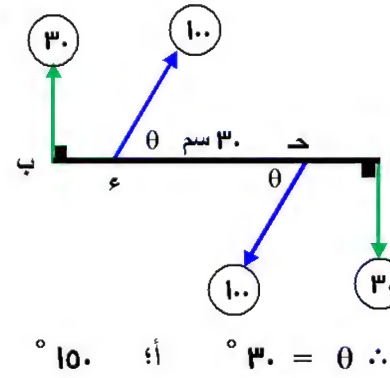
أى أن : الازدواجان المستويان ج<sub>١</sub> ، ج<sub>٢</sub> يتكافئان إذا كان : ج<sub>١</sub> = ج<sub>٢</sub>

ملاحظة : الازدواج لا يكافئ إلا ازدواج آخر

## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٨٣

١ ب قضيب خفيف طوله ٥٠ سم ، تؤثر قوتان مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن فى ١ ، ب فى اتجاهين متضادين و عمودتين على القضيب ، و أثرت قوتان أخريان قوتان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين فى نقطتين د ، ع من القضيب حيث د = ٣٠ سم بحيث يكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون من القوتين الأوليين ، أوجد قياس ميل القوتين الأخيرين على القضيب

الحل



القوتان ( ٣٠ ، ٣٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه

$$\text{الجبرى ج} = ٣٠ \times ٥٠ = ١٥٠٠ \text{ نيوتن.سم}$$

القوتان ( ١٠٠ ، ١٠٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه

$$\text{الجبرى ج} = ١٠٠ \times ٣٠ \text{ حـ } \theta$$

$$\therefore ج_١ = ج_٢ \text{ متكافئان } \therefore ج_١ = ج_٢$$

$$\therefore ١٠٠ \times ٣٠ \text{ حـ } \theta = ١٥٠٠ \therefore \theta \text{ حـ } \frac{١}{٣} = ١٥ \therefore \theta = ٣٠^\circ \text{ ؛ } ١٠^\circ$$

(٦) حاصل ضرب معيار احدى قوتى الازدواج فى ذراع الازدواج يسمى

(ب) عزم الازدواج

(د) عزم احدى قوتى الازدواج

(٧) إذا كان  $\vec{P} = 3\vec{S} - \vec{B}$  ،  $\vec{Q} = \vec{P} - \vec{S}$  ،  $\vec{O} = \vec{S} - \vec{B}$

تكونان ازدواجاً فإن ( ب ، ب ) =

(ب) ( ٣ ، ٥ )

(د) ( ٥ ، ٣ )

(٨) إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن . م و معيار احدى قوتيّه

٧ نيوتن فإن طول ذراع عزم الازدواج يساوى

(ب) ٥ متر (د) ٥ أمتار (٤) ٢٤٥٠٠ سم

الحل

(١) قوتان متوازيتان و متساويتان فى المقدار و متضادتان فى الاتجاه و ليستا على

خط عمل واحد

(٢) كل ما سبق

(٣) ازدواجاً

(٤) كل ما سبق

(٥) الازدواجان متزانان

(٦) عزم الازدواج

(٧) القوتان تكونان ازدواجاً  $\therefore \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} - \vec{Q}$

$\therefore \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} - \vec{Q}$

$\therefore \vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} - \vec{Q}$

(٨)  $\therefore 350 = 7 \times L$

أى أن : طول ذراع الازدواج = ٥ أمتار

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) الشكل المقابل : يوضح قوتين مقدار كل منهما

٤٠ نيوتن تؤثران على طرفى صفيحة مستطيلة

الشكل أبعادها س ، ص سم أوجد عزم

ازدواج القوتين فى كل من الحالات الآتية :

(ب) س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ،  $\theta = 0^\circ$  صفر

(ب) س = ص = ٦ سم ،  $\theta = \frac{\pi}{4}$

(د) س = . ، ص = ٥ سم ،  $\theta = 30^\circ$

(٤) س = ٦ سم ، ص = . ،  $\theta = 60^\circ$

(٥) س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ،  $\theta = \frac{\pi}{3}$

الحل

(ب)  $\therefore$  س = ٣ سم ، ص = ٤ سم ،  $\theta = 0^\circ$  صفر

$\therefore$  من الشكل المقابل يكون :

$4 \times 4 = 16$

= ١٦ نيوتن . سم

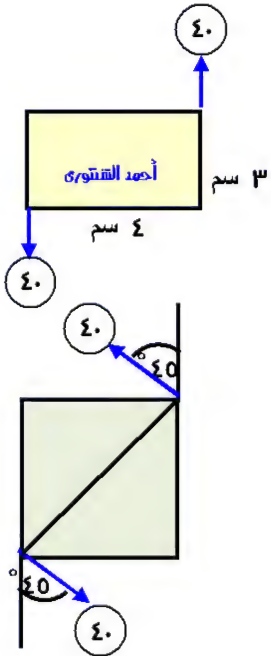
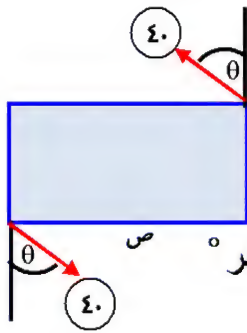
(ب)  $\therefore$  س = ص = ٦ سم ،  $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$  من الشكل المقابل يكون :

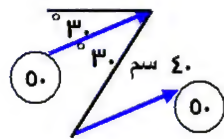
الشكل مربع طول قطره =  $7\sqrt{2}$  سم

$\therefore 7\sqrt{2} \times 4 = 28\sqrt{2}$

=  $28\sqrt{2}$  نيوتن . سم



الحل



(أ) من هندسة الشكل :

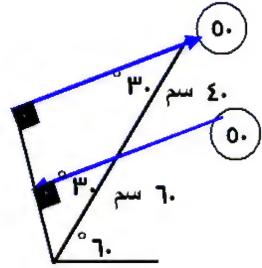
البعد العمودى = ٤٠ حـ ٣٠ =  $\frac{1}{5} \times ٤٠ = ٢٠$  سم $\therefore$  ج = ٥٠ - ٢٠ = ٣٠ نيوتن . سم

(ب) من الشكل المقابل :

ج = ٦٠ × ٥٠ حـ ٣٠ = ١٠٠ × ٥٠ حـ ٣٠

 $\frac{1}{5} \times ٥٠٠ - \frac{1}{5} \times ٣٠٠ =$ 

= ١٥٠ - ٦٠ = ٩٠ نيوتن . سم



(١١) أثرت القوتان ( ٣ سم - ٥ ص ) ، ( ٣ سم + ٥ ص )

نيوتن فى النقطتين م ، ب على الترتيب ، متجهاً موضعهما

( ٦ سم + ٤ ص ) ، ( ٦ سم + ٤ ص ) متر

برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد عزمه

الحل

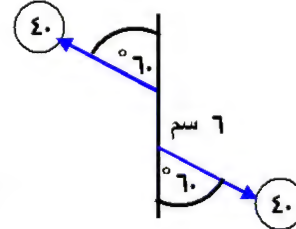
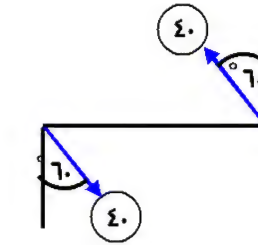
بفرض أن :  $\vec{Q}_1 = (٣ ، -٥)$  ، و هى تؤثر فى نقطة م ( ٦ ، ١ ) $\vec{Q}_2 = (٣ ، -٥)$  ، و هى تؤثر فى نقطة ب ( ٤ ، ١ ) $\therefore \vec{Q}_1 - \vec{Q}_2 = (١ ، ٠) = \vec{P}$  ،  $(١ ، ٠) = (١ ، ٦) - (٠ ، ٦) = \vec{P}$  $\vec{G} = \vec{P} \times \vec{Q}_1 = (١ ، ٠) \times (٣ ، -٥) = ١٠ - ٥ = ٥$  ، $\therefore$  من (١) ، (٢) ينتج : المجموعة تكافئ ازدواجاً عزمه = ١٠ ع

(١٢) أثرت القوتان ( ٣ سم - ٥ ص ) ، ( ٣ سم + ٥ ص )

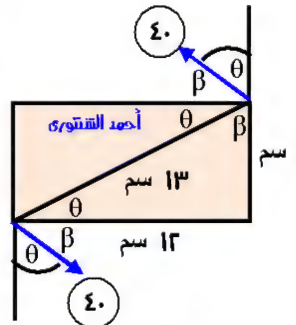
نيوتن فى النقطتين د ، ع على الترتيب حيث د ( ١ ، ٢ )

 $\vec{Q}_1 = (٣ ، -٥)$  ، فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجاً ، أوجد قيمة(د)  $\therefore$  س = ٥ ، ص = ٥ سم ،  $\theta = ٣٠^\circ$  $\therefore$  من الشكل المقابل يكون :

ج = ٤٠ × ٥ حـ ٦٠

 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times ٢٠٠ =$ = ١٠٠  $\sqrt{3}$  نيوتن . سم(٤)  $\therefore$  س = ٦ سم ، ص = ٥ ،  $\theta = ٦٠^\circ$  $\therefore$  من الشكل المقابل يكون :

ج = ٦ × ٤٠ حـ ٦٠

 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times ٢٤٠ = ١٢٠ \sqrt{3}$  نيوتن . سم(هـ)  $\therefore$  س = ٥ سم ، ص = ١٢ سم ،  $\theta = ٦٠^\circ$  $\therefore$  من الشكل المقابل يكون : $\theta = \beta + ٦٠^\circ$  $\therefore$  ج = ٤٠ × ١٣ = ٥٢٠ نيوتن . سم

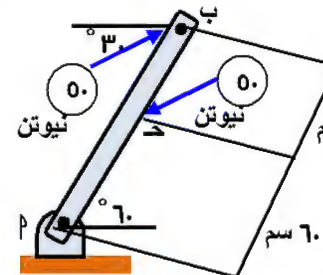
(١٠) الشكل المقابل :

يوضح قوتين معيار كل منهما ٥٠ نيوتن

تؤثران على رافعة م ب

أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج

بطريقتين :



(أ) باستخدام البعد العمودى بين القوتين

(ب) بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة

لنقطة م



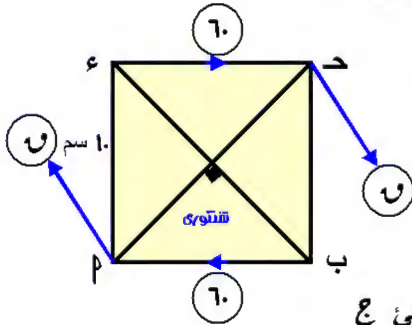

$$= \frac{1}{29} \sqrt{29} \text{ وحدة طول}$$

أحمد التنتوي

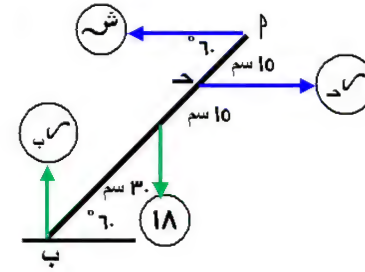
∴ ٢٠ يؤثر رأسياً لأسفل ∴  $\vec{r}$  يؤثر رأسياً لأعلى  
 ، من هندسة الشكل : ب ع = ٣٠ سم  
 ∴ ١٥ = ع م  
 ، القياس الجبرى لعزمهما  $\vec{r}$

$$\begin{aligned} \theta \times 20 \times 10 &= 30 \times 10 \\ \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

(١٧) ب د ع مربع طول ضلعه ١٠ سم أثرت القوتان ٦٠ ، ٦٠ نيوتن  
 فى اتجاهات ب م ، ع د أوجد قوتين متساويتين فى المقدار  
 تؤثران فى م ، د و توازيان ب ع و تكونان ازدواجاً متكافئ  
 مع الازدواج المكون من القوتين الأوليين



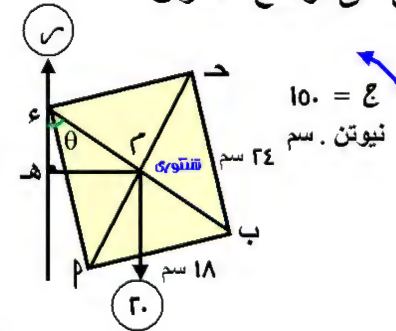
الحل  
 القوتان (٦٠ ، ٦٠) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  
 $\vec{r} = 60 \times 10 = 600$  نيوتن. سم  
 ، من هندسة الشكل : م د = ١٠ سم  
 و هو البعد العمودى بين القوتان (٦٠ ، ٦٠)  
 ، القوتان (٦٠ ، ٦٠) تكونان ازدواجاً قياسه  
 الجبرى  $\vec{r} = 60 \times 10 = 600$  نيوتن. سم  
 ∴  $\vec{r} = 600$  نيوتن. سم



∴ رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب أى :  
 $\vec{r} = 18$  ∴ القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان  
 ازدواجاً قياسه الجبرى  $\vec{r} = 18 \times 30 = 540$  نيوتن. سم  
 $\vec{r} = 27 \times 10 = 270$  نيوتن. سم

∴ القضيب متزن ،  
 ∴ القوتان (١٨ ، ١٨) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  
 $\vec{r} = 18 \times 10 = 180$  نيوتن. سم  
 و يكون :  $\vec{r} = 270 - 180 = 90$  نيوتن. سم  
 ∴  $\vec{r} = 90$  نيوتن. سم ،  $\vec{r} = 18$  نيوتن. سم  
 أى أن : الشد فى الحبل = رد فعل المسمار = ١٨ نيوتن

(١٦) ب د ع صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه م ب = ١٨ سم ،  
 ب د = ٢٤ سم ، و وزنها ٢٠ نيوتن يؤثر فى نقطة تلاقى القطرين  
 علفت الصفيحة فى مسمار رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ع  
 بحيث كان مستواها رأسياً ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار  
 عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن. سم ، و اتجاهه عمودى على مستوى  
 الصفيحة فأوجد ميل ع ب على الرأسى فى وضع الاتزان



الحل  
 ∴ الصفيحة متزن تحت تأثير الازدواج :  
 $\vec{r} = 150$  نيوتن. سم و القوتان (٢٠ ، ٢٠)  
 و بفرض أن الازدواج يعمل فى اتجاه عكس  
 دوران عقارب الساعة  
 ∴ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج مثله  
 ∴ القوتان (٢٠ ، ٢٠) تكونان ازدواجاً  
 ∴  $\vec{r} = 20$  نيوتن

٥ - ٢

## الازدواج المحصل

نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجاً :

يقال لعدة قوى مستوية  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$  أنها تكافئ ازدواجاً إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً :

(١) انعدام محصلة القوى

( أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر )

(٢) مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم

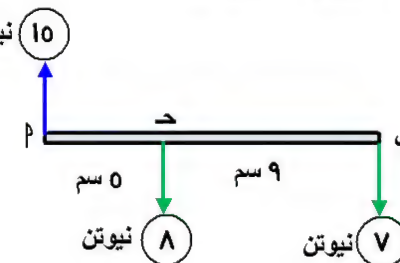
ملاحظات :

(١) تحقق أحد الشرطين لا يكفى لإثبات أن المجموعة تكافئ ازدواجاً

(٢) إذا انعدمت محصلة مجموعة من القوى أى (  $\vec{C} = \vec{0}$  ) و كان :(١)  $\vec{C} = \vec{0}$  فإن : مجموعة القوى تكون متزنة(٢)  $\vec{C} \neq \vec{0}$  فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً

إجابة تفكير ناقد صفحة ٨٧

ب قضيبي خفيف أثرت عليه القوى الموضحة بالشكل أوجد مجموع عزوم القوى حول كل من ب ، د ، ماذا تلاحظ ؟



الحل

بفرض أن :  $\vec{C}$  متجه وحدة فى اتجاه القوة 10 نيوتن ( رأسياً لأعلى )

$$\therefore \vec{C} = 10\vec{C}_1 - 8\vec{C}_2 - 7\vec{C}_3 = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{C} = 138 = 12 \times 10 - 9 \times 8 = 138 \text{ نيوتن . سم}$$

$$\therefore \vec{C} = 0 = 0 \times 10 - 9 \times 7 = 0 \text{ نيوتن . سم}$$

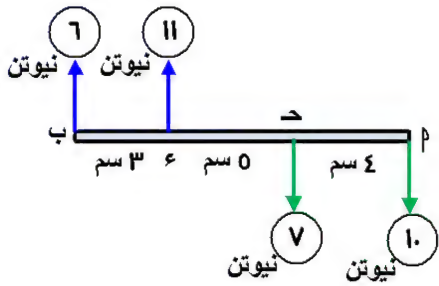
،  $\therefore \vec{C} = \vec{0}$  ،  $\vec{C} = \vec{0}$  .  $\therefore$  خط عمل المحصلة // ب د

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٨٧

فى الشكل المقابل :

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً  
و أوجد القياس الجبرى لعزمه

الحل



بفرض أن :  $\vec{C}$  متجه وحدة فى الاتجاه رأسياً لأعلى

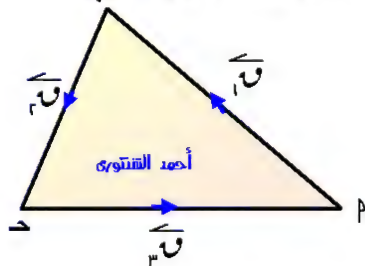
$$\therefore \vec{C} = 10\vec{C}_1 + 6\vec{C}_2 - 7\vec{C}_3 = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{C} = 12 = 12 \times 10 - 3 \times 6 = 123 \text{ نيوتن . سم}$$

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه = 123 نيوتن . سم

قاعدة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية و غير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المثلث فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال ب ففى الشكل المقابل :

إذا كانت :  $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$  ثلاث قوى

يمثلها تمثيلاً تاماً أضلاع المثلث ب د

$$\text{و كان : } \vec{C} = \frac{\vec{C}_1}{P} = \frac{\vec{C}_2}{D} = \frac{\vec{C}_3}{B}$$

حيث  $\vec{C}$  مقدار ثابت و مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

فإن : المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه =

$$2 \times \text{مساحة سطح المثلث} \times \vec{C}$$



## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٨٨

١٠ ب د مثلث قائم الزاوية فى ب فيه ١٠ ب = ٣ سم ، ب د = ٤ سم  
أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن فى ١٠ ب ، ١٠ د ، ١٠ م على  
الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

من هندسة الشكل : ١٠ ب د = ٥ سم

$$\therefore \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = \frac{1}{20} = \frac{1}{40}$$

∴ مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال =  $\frac{1}{5}$  نيوتن

∴ القوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد  
∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً ،

معيار عزم الازدواج = ٢ × مساحة المثلث ١٠ ب د ×  $\frac{1}{5}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{5} = 2.4 \text{ نيوتن.سم}$$

تعميم :

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك و مثلها تمثيلاً تاماً أضلاع  
مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ  
ازدواجاً معيار عزمه يساوى حاصل ضرب ضعف مساحة سطح المضلع  
فى مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

## إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٨٩

١٠ ب د ع شبه منحرف فيه : ١٠ ب // ١٠ د ، ١٠ ب ⊥ ١٠ د ،

١٠ ب = ٦ سم ، ١٠ د = ٩ سم ، ١٠ ب = ٣ سم أثرت القوى ١٠ ب ،

١٠ د ، ١٠ ع ممثلة تمثيلاً تاماً بالقطع المستقيمة الموجهة ١٠ ب ،

١٠ د ، ١٠ ع على الترتيب فإذا كانت المجموعة تكافئ

ازدواجاً معيار عزمه ٣٦ نيوتن.سم فى الاتجاه ١٠ ب د ع فأوجد

مقدار كل من ١٠ ب ، ١٠ د ، ١٠ ع ، ١٠ ب

الحل

من هندسة الشكل : ١٠ ب د = ٦ سم ،

١٠ د = ٦ سم ، ١٠ ب د = ٦ سم

∴ القوى تؤثر فى أضلاع المضلع و  
مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، و تكافئ

ازدواجاً معيار عزمه ٣٦ نيوتن.سم

$$\therefore 36 = 2 \times \text{مساحة سطح شبه المنحرف ١٠ ب د ع} \times 2$$

حيث : ٢ = مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال

$$\therefore 36 = 2 \times \frac{1}{2} \times (3 \times 9) \times \frac{1}{6} \times 2$$

ومنها : ٢ = ٥

$$\therefore \frac{1}{6} = \frac{1}{9} = \frac{1}{18} = \frac{1}{36}$$

$$\therefore 10 = 3 \times 5 = 15 \text{ نيوتن} ، 10 = 3 \times 5 = 15 \text{ نيوتن}$$

$$، 10 = 3 \times 5 = 15 \text{ نيوتن} ، 10 = 3 \times 5 = 15 \text{ نيوتن}$$

قاعدة :

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية  
بالنسبة لثلاث نقط فى مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى  
مقداراً ثابتاً ( لا يساوى الصفر ) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً  
القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت

أى أن :

إذا كانت : ١٠ ب ، ١٠ د ، ١٠ ع ثلاث نقط فى مستوى القوى و ليست على

استقامة واحدة و كان : ١٠ ب = ١٠ د = ١٠ ع = مقدار ثابت

( لا يساوى الصفر ) فإن : مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٩.

ب د ع مربع طول ضلعه ١. سم ،  $\vec{د ب} \Rightarrow \vec{ه د}$  ، و  $\vec{د ع} \Rightarrow \vec{ه د}$  بحيث كان  $\vec{د ه} = \vec{د و} = ٣. \text{ سم}$  ، أثرت قوى مقاديرها ٤. ، ١. ، ٢. ، ٣. ،  $\vec{٢.}$  ،  $\vec{٣.}$  ث كجم فى  $\vec{م ب}$  ،  $\vec{ب د}$  ،  $\vec{د ع}$  ،  $\vec{ع ه}$  ،  $\vec{ه و}$  على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه

الحل

من هندسة الشكل :

$$\vec{ه د} = \vec{د و} \times \sin 40^\circ$$

$$\vec{٢.} = \frac{1}{\vec{٢.}} \times ٤. =$$

$$\therefore \vec{ج} = ١. \times ٣. + ١. \times ٤. =$$

$$\vec{٢.} \times \vec{٢.} =$$

$$= ١. \text{ ث كجم . سم}$$

$$\vec{ج} = ٤. \times ٢. + ١. \times ٣. =$$

$$= ٣. \times ٤. = ١٢. \text{ ث كجم . سم}$$

$$\vec{ج} = ٣. \times ٣. - ١. \times ٤. + ٤. \times ١. = ١٢. \text{ ث كجم . سم}$$

∴ النقط د ، ه ، و ليست على استقامة واحدة

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ،

معيار عزمه  $١٢. = ١٠. \text{ ث كجم . سم}$

## الازدواج المحصل :

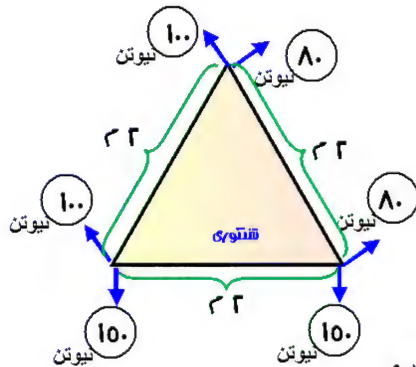
يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه :  
الازدواج الذى عزمه يساوى مجموع عزمى هذين الازدواجين

$$\vec{ج} = \vec{ج_١} + \vec{ج_٢} \text{ و يسمى مجموع ازدواجين مستويين}$$

بالازدواج المحصل ( المجموعة تكافئ ازدواجاً )

ملاحظة :

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوى مجموع عزوم هذه الازدواجات



## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٩١

الشكل المقابل :

يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تؤثر عليها القوى كما بالشكل أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل

الحل

القوتان ( ٨.٠ ، ٨.٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$\vec{ج} = ٨.٠ \times ٢ = ١٦.٠ \text{ نيوتن . م}$$

القوتان ( ١٠.٠ ، ١٠.٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$\vec{ج} = ١٠.٠ \times ٢ = ٢٠.٠ \text{ نيوتن . م}$$

القوتان ( ١٠.٠ ، ١٠.٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$\vec{ج} = ١٠.٠ \times ٢ = ٣٠.٠ \text{ نيوتن . م}$$

$$\therefore \text{الازدواج المحصل} = \vec{ج_١} + \vec{ج_٢} + \vec{ج_٣} = ١٦.٠ + ٢٠.٠ + ٣٠.٠ = ٦٦.٠ \text{ نيوتن . م}$$

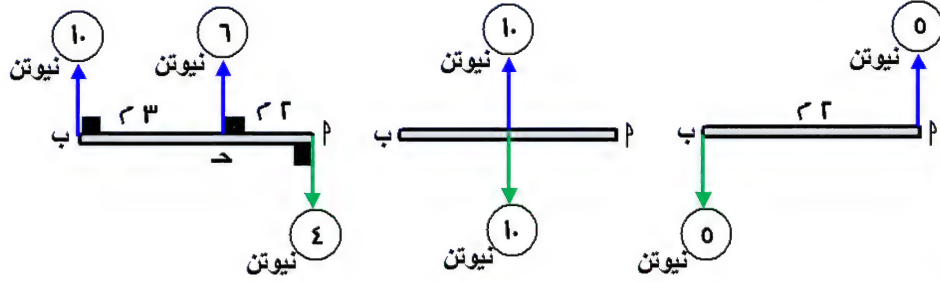
## حل تمارين ( ٥ - ٢ ) صفحة ٩٢ بالكتاب المدرسى

(١) بين أى نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجاً  
و أوجد القياس الجبرى لعزمه :

(١)

(ب)

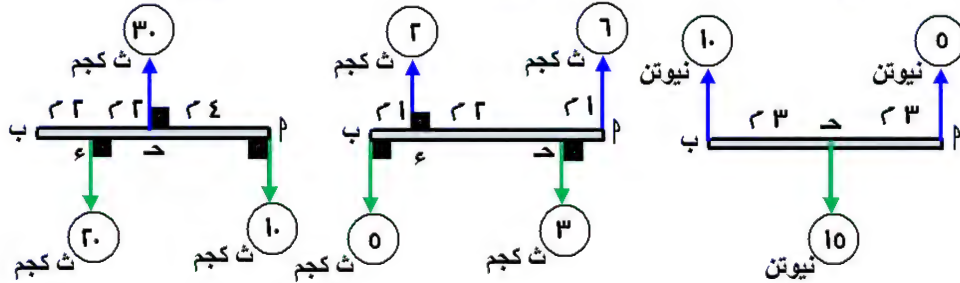
(ح)



(٤)

(هـ)

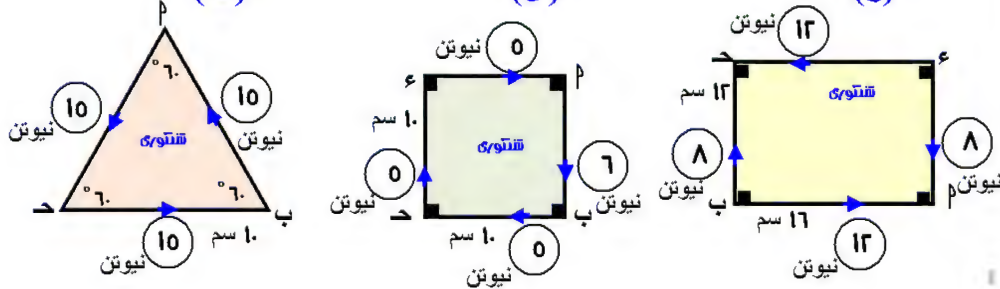
(و)



(ز)

(ع)

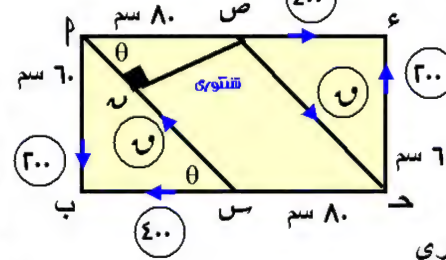
(ط)



## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٩١

١٦. سم ، ب ، ح = ٦. سم ، ب ، ح = ١٦. سم ، س ، ص ،  
منتصفى ب - د ، ٤. سم ، أثرت قوى مقاديرها ٢.٠ ، ٢.٠ ، ٤.٠ ، ٤.٠ ،  
٠ ، ٠ نيوتن فى الاتجاهات  $\vec{AB}$  ،  $\vec{CD}$  ،  $\vec{CB}$  ،  $\vec{DA}$  ،  $\vec{AC}$  ،  $\vec{BD}$  ،  
ص - د على الترتيب ، إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل  
يساوى ٦٤.٠ نيوتن . سم أوجد قيمة  $\theta$

الحل



من هندسة الشكل :  $\theta = \arcsin \frac{6.0}{8.0} = 47.3^\circ$

ص = ٨.٠ سم ، ح = ٨.٠ سم ، س = ١.٠ سم ، ب = ٦.٠ سم

٤٨ سم

القوتان ( ٢.٠ ، ٢.٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج = ١٦.٠ × ٢.٠ - ٣٢.٠ = ٠ نيوتن . سم

القوتان ( ٤.٠ ، ٤.٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

ج = ٦.٠ × ٤.٠ = ٢٤.٠ نيوتن . سم

، القوتان ( ٠ ، ٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه

ج = ٠ × ٠ = ٠ نيوتن . سم

∴ الازدواج المحصل = ٦٤.٠ نيوتن . سم

∴ ٦٤.٠ = ٣٢.٠ + ٢٤.٠ + ٤٨ × ٠

∴ ٦٤.٠ = ٤٨ × ٠

∴ ٤٨ = ١٤٤.٠

∴ ٠ = ٣.٠ نيوتن



\_\_\_\_\_



أحمد التنتوي

$$V_0 = \sqrt[3]{\frac{F}{\rho}} \quad \text{نيوتن . سم}$$

القوتان ( ٢٠ ، ٢٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$ج_١ = ٢٠ \times ٣٠ - ٣٠ \times ١٠ = ٣٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

، القوتان ( ١٥ ، ١٥ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$ج_٢ = ١٥ \times ٣٠ - ٣٠ \times ٧٥ = ٣٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$ج_١ + ج_٢ = ٣٠٠ + ٣٠٠ = ٦٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore \text{المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه} = ٦٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

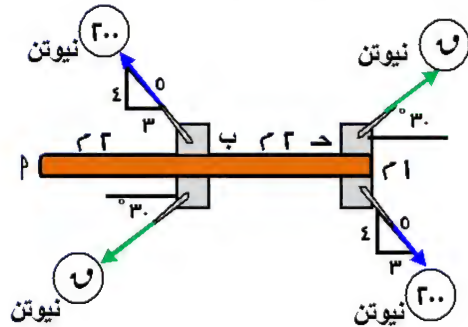
و يعمل فى الاتجاه  $\vec{p}$  ب د

،  $\therefore$  الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

، القوتان ( ١٠ ، ١٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى = ٣٠٠ ث كجم . سم

$$\therefore ١٠ \times ٣٠ = ٣٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore ( ١٠ ، ١٠ ) = ( ١٧ ، ٥ )$$



(٦) الشكل المقابل :

يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى

الموضحة بالشكل

إذا كان القياس الجبرى لعزم

الازدواج المحصل يساوى

$$٢٠٠ - ٣٠٠ \text{ نيوتن . م}$$

أوجد  $U$

الحل :

بتحليل القوى فى اتجاهين

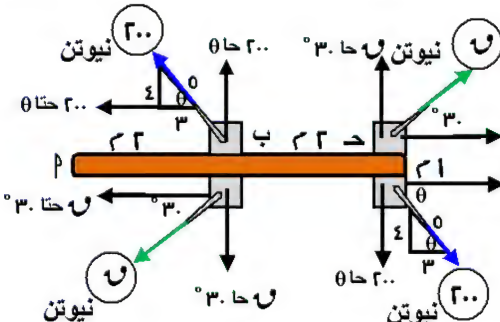
متعامدين كما بالشكل يكون :

القوتان ( ٣٠ حـ ، ٣٠ حـ )

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$ج_١ = ٣٠ \times ٣٠ = ٩٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$٩٠٠ = ٢ \times ٣٠ \times U \Rightarrow U = ١٥ \text{ نيوتن . م}$$



عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى  $\vec{p}$  ،  $\vec{d}$  عموديتين على  $\vec{p}$  بحيث تتزن المجموعة

الحل :

القوتان ( ٣٠ ، ٣٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه

$$ج_١ = ٣٠ \times ٣٠ = ٩٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

، القوتان ( ١٥ ، ١٥ ) تكونان ازدواجاً قياسه

$$ج_٢ = ١٥ \times ٤٠ = ٦٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$ج_١ + ج_٢ = ٩٠٠ + ٦٠٠ = ١٥٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore \text{المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه} = ١٥٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

و يعمل فى الاتجاه  $\vec{p}$  ب د

،  $\therefore$  الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

، القوتان ( ١٠ ، ١٠ ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى = ٣٠٠ ث كجم . سم

$$\therefore ١٠ \times ٣٠ = ٣٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore ( ١٠ ، ١٠ ) = ( ١٧ ، ٥ )$$

(٥)  $\vec{p}$  ب د  $\vec{d}$  معين طول ضلعه ١٠ سم ،  $\vec{p}$  ب د  $\vec{d}$   $120^\circ$  ،

أثرت قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ٢٠ ث كجم فى  $\vec{p}$  ،  $\vec{d}$  ،

$\vec{d}$  ،  $\vec{p}$  على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و

أوجد معيار عزمه ، ثم أوجد قوتين تؤثران فى  $\vec{p}$  ،  $\vec{d}$  عموديتين

على  $\vec{p}$  بحيث تتزن المجموعة

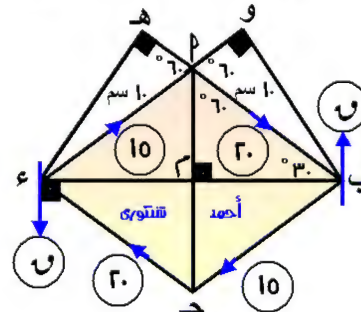
الحل :

من هندسة الشكل :

$$١٠ = ٣٠ \text{ حـ } ٣٠ = ٩٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$٢٠ = ٢٠ \text{ حـ } ٢٠ = ٤٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$

$$٩٠٠ + ٤٠٠ = ١٣٠٠ \text{ ث كجم . سم}$$









$$ج ب د \text{ مثلث فيه } \angle ب = \angle د = \angle ب = 7 \text{ سم ، } \angle ب = 120^\circ$$

$$ج ب د \text{ مثلث فيه } \angle ب = \angle د = \angle ب = 7 \text{ سم ، } \angle ب = 120^\circ$$

أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ١٨ ، ١٨ ث ج م فى  $\vec{م ب}$  ،  $\vec{د ب}$  ،  $\vec{د م}$  على الترتيب أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل  
من هندسة الشكل :  $\vec{م ب} = \vec{د ب} = 7 \text{ سم}$   
" من قانون جيب التمام "

$$\therefore \frac{7}{\sin 120^\circ} = \frac{18}{\sin 30^\circ} \Rightarrow 7 = 18 \times \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

، القوى فى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$$= 2 \times \text{مساحة سطح المثلث } \vec{م ب د} \times 7$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \sin 120^\circ = 7 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24.25 \text{ ث ج م سم}$$

∴ معيار عزم الازدواج المحصل =  $24.25 \text{ ث ج م سم}$

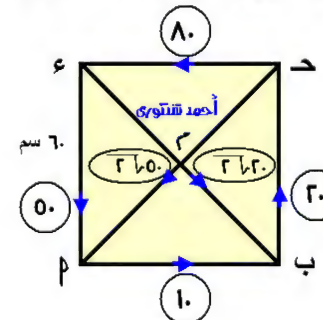
$$(2) \text{ م ب د ع مربع طول ضلعه } 7 \text{ سم تؤثر القوى } 10 ، 20 ، 80 ، 50$$

نيوتن فى اتجاهات  $\vec{م ب}$  ،  $\vec{د ب}$  ،  $\vec{د ع}$  ،  $\vec{م ع}$  على الترتيب و أثرت

قوتان مقدارهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن فى  $\vec{م د}$  ،  $\vec{م ب}$  على

الترتيب ، برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوى

$$4800 \text{ نيوتن . سم}$$



الحل  
من هندسة الشكل :  $\vec{م ب} = \vec{د ب} = 7 \text{ سم}$

$$ج م = 7 \times 80 + 7 \times 20 = 700$$

$$- 4800 = 700 \times 7 - 4800 \text{ نيوتن . سم}$$

(١٢) فى الشكل المقابل :

أوجد  $\vec{م ب}$  التى تجعل القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى  $100 - 300 \text{ نيوتن م}$

الحل

بتحليل القوى فى اتجاهين متعامدين

كما بالشكل المقابل يكون :

القوتان  $(\vec{م ب} \cos \theta)$  ،  $(\vec{م ب} \sin \theta)$

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$ج م = \vec{م ب} \cos \theta \times 1$$

$$= \vec{م ب} \times \frac{4}{5} \times 1$$

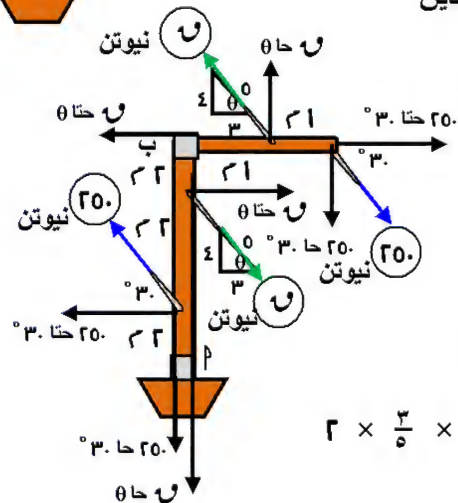
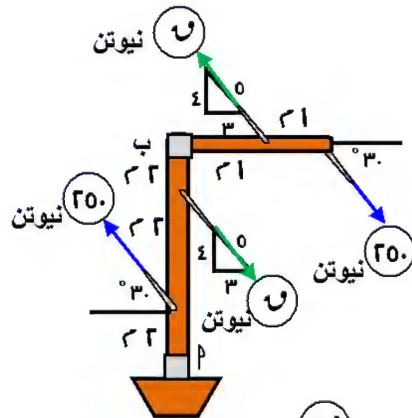
$$= \frac{4}{5} \vec{م ب} \text{ نيوتن م}$$

القوتان  $(\vec{م ب} \cos \theta)$  ،  $(\vec{م ب} \sin \theta)$

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

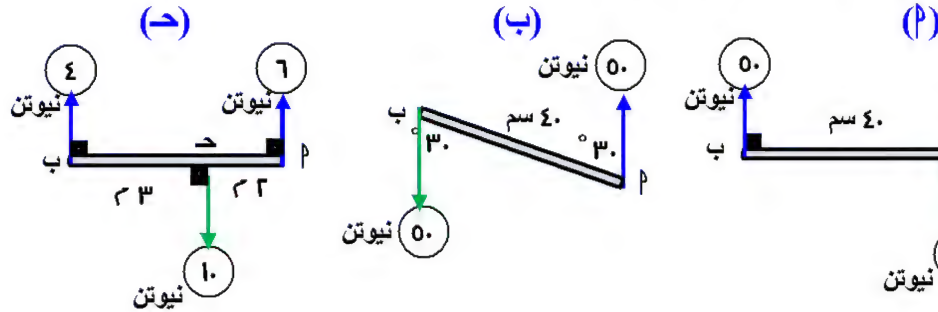
$$ج م = \vec{م ب} \sin \theta \times 2 = 2 \times \frac{3}{5} \times \vec{م ب}$$

$$= \frac{6}{5} \vec{م ب} \text{ نيوتن م}$$



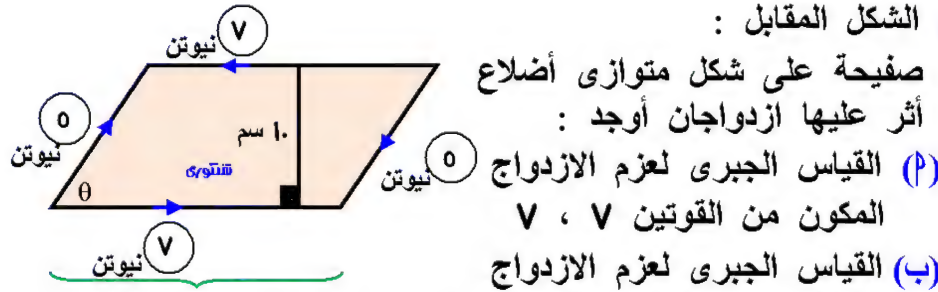
## حل تمارين عامة صفحة ٩٥ بالكتاب المدرسى

(١) أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل  
فى كل من الأشكال الآتية :



- (١) عزم الازدواج المحصل =  $4 \times 0 = 0$  نيوتن . سم  
(ب) عزم الازدواج المحصل =  $40 \times 0 = 0$  نيوتن . سم  
(ج) عزم الازدواج المحصل =  $3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$  نيوتن . سم

(٢) الشكل المقابل :



- (١) القياس الجبرى لعزم الازدواج  
المكون من القوتين  $V$  ،  $V$   
(ب) القياس الجبرى لعزم الازدواج  
المكون من القوتين  $0$  ،  $0$  عندما  $\theta = 60^\circ$  سم ١٦  
(ج) إذا كان القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل يساوى  
٣ نيوتن . سم فما قيمة  $\theta$  ؟  
(د) إذا أترنت الصفيحة فما قيمة  $\theta$  ؟

القوتان (  $20^\circ$  ،  $30^\circ$  )

تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$2 \times \frac{1}{2} \times 20 = 2 \times 30 = 20$$

$$20 = 20 \text{ نيوتن . سم}$$

القوتان (  $20^\circ$  ،  $30^\circ$  ) تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = 2 \times 30 = 20$$

$$20 = 20 \text{ نيوتن . سم}$$

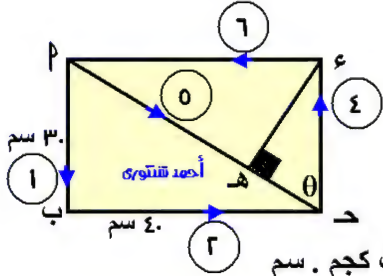
∴ الازدواج المحصل =  $10 - 10 = 0$  نيوتن . سم

$$10 - 20 = 0 \text{ نيوتن . سم}$$

$$10 = 0 \text{ نيوتن . سم}$$

- (٤)  $P$  ب د ع مستطيل فيه  $P = 3$  سم ،  $b = 4$  سم أثرت قوى مقاديرها ١، ٢، ٤، ٦، ٥ ث كجم فى كل من  $P$  ،  $b$  ،  $d$  ،  $e$  ،  $P$  ،  $P$  على الترتيب برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه

الحل

من هندسة الشكل :  $P d = 5$  سم

$$e h = b d \text{ ح } \theta = \frac{4}{5} \times 3 = 2.4 \text{ سم}$$

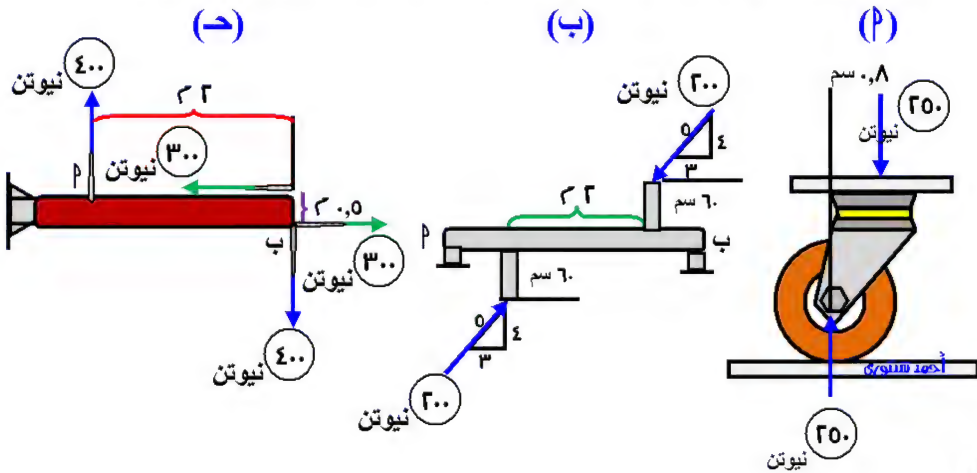
$$E = P \times 2 + 3 \times 4 = 22 \text{ ث كجم. سم}$$

$$E = 22 \times 5 + 3 \times 4 + 4 \times 1 = 122 \text{ ث كجم. سم}$$

$$E = 3 \times 6 + 4 \times 1 = 22 \text{ ث كجم. سم}$$

∴ النقط  $P$  ،  $e$  ،  $d$  ليست على استقامة واحدة∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، معيار عزمه  $22$  ث كجم. سم

- (٥) عين معيار عزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية :



الحل

(١) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين  $V$  ،  $V$ 

$$E = 10 \times V = 70 \text{ نيوتن. سم}$$

(ب) القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين  $0$  ،  $0$  عندما  $\theta = 60^\circ$ 

$$E = 16 \times 0 = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 69.28 \text{ نيوتن. سم}$$

$$3 = 10 \times V = 16 \times 0 \text{ ح } \theta = 80^\circ$$

$$\frac{1}{3} = \theta \text{ ح } \theta = 30^\circ$$

$$16 \times 0 = 10 \times V \text{ ح } \theta = 60^\circ$$

$$\frac{11}{3} = \theta \text{ ح } \theta = 36.9^\circ$$

(٤) ∴ الصفحة متزنة

- (٣)  $P$  ب قضيب منتظم طوله  $2$  سم يمكنه الدوران بسهولة فى مستوى رأسى حول مسمار أفقى ثابت فى وضع أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة  $d \Rightarrow P$  حيث  $P = 0$  سم ، إذا أُنزل القضيب فى وضع أفقى تحت تأثير قوتين مقدار كل منهما  $0$  نيوتن و تؤثران فى طرفيه  $P$  ،  $b$  فى اتجاهين متضادين و تصنعان مع القضيب زاوية قياسها  $30^\circ$  أوجد وزن القضيب

الحل

القوتان  $(0, 0)$  تكونان ازدواجاً قياسه

$$E = 20 \times 0 = 30^\circ$$

$$0 = 100 \times \frac{1}{3} = 33.33 \text{ نيوتن. سم}$$

∴ القضيب متزن ∴ القوتان  $(0, 0)$ تكونان ازدواجاً قياسه الجبرى  $E = 0 \times 0 = 0$ 

$$\therefore 0 = 0 + 0 \times 0 \therefore 10 = 0 \text{ نيوتن}$$





(٨) القوتان  $\overline{ق} = \overline{س} - \overline{ص}$  ،  $\overline{ق} = \overline{ب} + \overline{س} - \overline{ص}$

تؤثر في النقطة د (٢، ١) ، ٤ (٠، -٢) على الترتيب وتكونان ازدواجاً ، أوجد قيمة كل من  $p$  ،  $b$  ثم أوجد عزم الازدواج و طول البعد العمودي بين القوتين

∴ القوتان تكونان ازدواجاً ∴  $\vec{u} = -\vec{u}$

$$F = C, \quad 0 = P \therefore \quad \underbrace{C}_V - \underbrace{0}_S = \underbrace{F}_V - \underbrace{P}_S \therefore$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{s} \therefore$$

عزم الازدواج = عزم  $\overline{Q}$  حول  $\overline{C} = \overline{Q} \times \overline{C}$  ،

$$(P - 10) \times [(r - 1) - (1 - 12)] =$$

$$\vec{e}_{11} = (3, 0) \times (1, 2) =$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{9+4} = \|\vec{u}\| \therefore, \quad 11 = \|\vec{e}\| \therefore$$

$$\frac{11}{34} = \frac{\| \vec{c} \|}{\| \vec{u} \|} = \text{البعء العمودى بين خطى عمل القوتين}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{11}{34}} \text{ وحدة طول}$$

(٩) أثرت القوة :  $\overline{P} = \overline{V}$  في نقطة الأصل كما أثرت القوة :

$\overline{v_1} = \overline{v_2}$  في النقطة (٢، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأي نقطة (س، ص) لا يعتمد على س، ص



$\therefore \overline{u} = (., 6)$  تؤثر في النقطة  $(., .)$

∴ عزمها بالنسبة للنقطة (س ، ص )

$$(1,0) \times [(5,5) - (0,0)] =$$

$$\overleftarrow{E}(1-)= (1,0) \times (0-,1-)=$$

$\therefore \overline{u} = (0, -1)$  تؤثر في النقطة  $(2, 0)$

∴ عزمها بالنسبة للنقطة (س ، ص )

$$(1 - \epsilon) \times [(\text{ص}, \text{س}) - (\epsilon, \text{ر})] =$$

$$\overline{C}(-12 + 7) = (-12 + 7) \times (-2 - 5) =$$

∴ مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة ( س ، ص )

$$\overline{E}_{12} = \overline{E}_1 (s_1 + 12) + \overline{E}_2 (s_1 - 1) =$$

∴ مجموع عزوم القوى لا يعتمد على  $s$  ،  $v$

(10) أثرت القوى  $\overline{Q_1} = \overline{s_2} - \overline{s_4}$  ،  $\overline{Q_2} = \overline{s_3} - \overline{s_1}$

$$\overline{u}_E = \overline{u}_S + \overline{v}_S \quad \text{في النقط } P(1,1) \text{ ، } B(-2,3)$$

د(١٠٠) على الترتيب برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجاً و أوجد معيار عزمه


$$(1, 1-) = (., .) - (1, 1-) = \overline{19} \because$$
$$(3, 1-) = (0, 0) - (3, 1-) = \overline{وب} ,$$
$$(1, \cdot) = (\cdot, \cdot) - (1, \cdot) = \overline{1} \text{ وح } ,$$

$$\overline{\text{و}} \times \overline{\text{ح}} + \overline{\text{و}} \times \overline{\text{ب}} + \overline{\text{و}} \times \overline{\text{پ}} = \overline{\text{مج}} \therefore$$

$$(1-1) \times (1, 1-) + (1-1) \times (1, 1-) =$$

$$(1) \quad \overleftarrow{\mathcal{E}} \Lambda = \overleftarrow{\mathcal{E}} \Psi + \overleftarrow{\mathcal{E}} \Psi + \overleftarrow{\mathcal{E}} \Gamma = (V, \Psi-) \times (1, \cdot) +$$

$$(7) \quad \overline{\cdot} = \overline{\cdot}_u + \overline{\cdot}_v + \overline{\cdot}_w = \overline{\cdot} \because,$$

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن :

المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه  $\Lambda =$  وحدة عزم

## حل اختبار تراكمى صفحة ٩٧ بالكتاب المدرسى

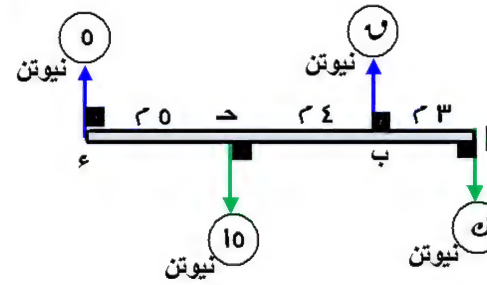
أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

- (١) إذا كانت قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة و قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإن مقدار محصلتهما يساوى .... نيوتن  
 (أ) ١٢ (ب) ٤ (ج) ٤ - ٨ (د) ٨ - ٤
- (٢) إذا كانت قوتان متوازيتان و متحدتا الاتجاه مقدارهما ٥ ، ٧ نيوتن تؤثران فى نقطتى م ، ب فإن مقدار محصلتهما يساوى ....  
 (أ) ١٢ (ب) ٢ (ج) ٧٤ (د) ٢٤
- (٣) إذا كانت القوة  $\vec{Q} = \vec{S}_2 - \vec{S}_3$  تؤثر فى النقطة (١، -٢) فإن عزم  $\vec{Q}$  بالنسبة للنقطة ب (-١، ٤) يساوى ....  
 (أ) ٦ - ع (ب) ٦ ع (ج) ٢٢ ع (د) ٢٢ - ع
- (٤) إذا كانت القوة  $\vec{Q} = \vec{S}_2 + \vec{S}_3 - \vec{S}_4$  تؤثر فى النقطة م (٢، -١، ٣) فإن عزم  $\vec{Q}$  بالنسبة للنقطة الأصل يساوى  
 (أ) ٣ - س٢ + ٩ ص + ٥ ع (ب) - س٢ - ٢ ص + ع (ج) ٣ - س٢ - ٩ ص - ٥ ع (د) ٣ - س٢ - ٩ ص - ٥ ع
- (٥) إذا أُنزنت ثلاث قوى مستوية و متساوية فى المقدار و متلاقية فى نقطة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين منهما يساوى ....  
 (أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٢٠°

الحل

$$(١) \because \vec{C} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 \text{ حتى}$$

$$\because \vec{C} = ١٦ + ٦٤ + ٢ \times ٤ \times ٨ \times \left(-\frac{1}{4}\right) = ٤٨ \therefore \vec{C} = ٤ \sqrt{٣}$$



## (١١) الشكل المقابل :

يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب م ب تكون ازدواج القياس الجبرى لعزمه يساوى - ٧٥ نيوتن م. أوجد قيمة كل من م ، ن

الحل

نفرض  $\vec{C}$  متجه وحدة رأسياً لأعلى

$$\therefore \vec{C} = (١٠ - ن - ٥ + م) \vec{C}$$

$$\therefore ١٠ - ن - ٥ = ٠$$

$$\therefore \text{المجموعة تكون ازدواج} \therefore ١٠ = ن - م$$

$$\therefore \text{القياس الجبرى لعزم الازدواج} = - ٧٥ \text{ نيوتن م.}$$

$$\therefore - ٧٥ = م \times ٢$$

$$\therefore - ٧٥ = ١٢ \times ٥ - ٣ \times م - ٧ \times ١٠$$

$$\therefore - ٧٥ = ٦٠ - ٣ م - ٧٠$$

$$\therefore ١٢٠ = ٣ م$$

$$\therefore \text{من (١) ينتج : } ن = ٣٠ \text{ نيوتن}$$

$$\therefore م = ٤٠ \text{ نيوتن}$$







$$\therefore \frac{10}{1} = 0 \text{ و منها : } 0 = 50 \text{ نيوتن}$$

، هندسة الشكل :  $p = 12 \text{ سم}$  ( فيثاغورث )

، معيار عزم الازدواج  $= 2 \rightarrow (p \Delta \text{ ب ح } ) \times 2$

$$2 = \frac{1}{2} \times p \times \text{ب} \times \text{ح} \times \text{ح} \times \text{ح} \times p \times 2$$

$$2 = \frac{1}{2} \times p \times \text{ب} \times \text{ح} \times \text{ح} \times p \times 2 \text{ حقا } \frac{1}{2} \times p \times 2$$

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = 2 \times \frac{1}{2} \times 13 \times 13 \times 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} \times 0$$

$$= 60 \text{ نيوتن . سم}$$

### الاختبار الثانى

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(1) يؤثر على الجسم ازدواجان الأول مقدار احدى قوتيهِ ٢٠ ث كجم و

ذراع العزم  $\frac{1}{2}$  متر و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

و الثانى مقدار احدى قوتيهِ ٣٠ ث كجم وذراع العزم ١ متر و اتجاه

دورانه فى اتجاه دوران الساعة

فإن : الازدواج المحصل يساوى ....

(ب) ٢٠ ث كجم . ٢ و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(ب) ٢٠ ث كجم . ٢ و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

(د) ٤٠ ث كجم . ٢ و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(٤) ٤٠ ث كجم . ٢ و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

**الحلـ**

$$\text{الازدواج المحصل} = \frac{1}{2} \times 20 \times 1 \times 30 = 1 \times 30 = 30 \text{ ث كجم . سم}$$

$$\therefore \text{الازدواج المحصل} = 20 \text{ ث كجم . سم} \text{ و اتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة}$$

### اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

#### الاختبار الأول

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) قوتان تكونان ازدواج ، مقدار احدهما ١٥ نيوتن و عزم الازدواج

المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن :

البعد العمودى بينهما يساوى ....

(ب) ٦٠ سم (د) ٣ سم (٤) ٣٠ سم

**الحلـ**

بفرض أن :

البعد العمودى بين القوتين =  $l$  سم

$\therefore$  القوتان تكونان ازدواجاً

$$\therefore 10 = 50 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{عزم الازدواج المحصل} = 50 \text{ نيوتن . سم}$$

$$\therefore 40 = l \times 10 \text{ و منها : } l = 3 \text{ سم}$$

**السؤال الثالث :**

(٢)  $p$  ب ح مثلث متساوى الساقين فيه  $p = \text{ب} = \text{ح} = 13 \text{ سم}$

،  $\text{ب} = \text{ح} = 10 \text{ سم}$  ، أثرت القوى ٦٥ ، ١٠ ، ١٠ نيوتن فى

$\vec{p}$  ،  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى

تكافئ ازدواج فما قيمة  $q$  ، و معيار عزم الازدواج  $p$

**الحلـ**

$\therefore$  القوى تؤثر فى أضلاع مثلث و مأخوذة فى ترتيب

دورى واحد ، و تكافئ ازدواجاً

$$\therefore 3 = \text{مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال} = \frac{60}{13}$$

$$0 =$$









∴ المجموعة تكون ازدواج

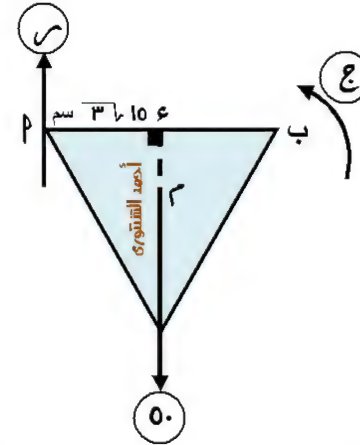
$$\vec{c} = \vec{p} \times \vec{q} + \vec{q} \times \vec{b} = \vec{q} \times \vec{p}$$

$$(1, 2) \times (4, 0) + (1, 0) \times (1, 1) = \vec{q} \times \vec{p}$$

$$-11\vec{e} = -8\vec{e} - 3\vec{e} =$$

تم بحمد الله

أحمد الشنتوي



∴ الصفحة متزنة تحت تأثير ج ، ر ، ٥٠ .  
∴ القوتان ( ر ، ٥٠ ) تكونان ازدواجاً  
∴ ( ٥٠ ) يؤثر رأسياً لأسفل  
∴ ر = ٥٠ ث جم و يؤثر رأسياً لأعلى  
ج = ٥٠ × ٦٢ = ٥٠ × ٣٦١٥ سم  
٧٥٠ = ٣٦١٥ ث جم . سم

### الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) إذا كونت القوتان  $\vec{p} + \vec{q} = \vec{r}$  ،  $\vec{p} - \vec{q} = \vec{s}$  ،  $\vec{p} - \vec{q} = \vec{b}$  ازدواج فإن :  $\vec{p} + \vec{b} = \dots$

الحلـ

$$\vec{p} + \vec{q} = \vec{r} \quad \vec{p} - \vec{q} = \vec{s} \quad \vec{p} - \vec{q} = \vec{b}$$

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{p} - \vec{q} = \vec{r} + \vec{s} \quad \vec{p} + \vec{q} + \vec{p} - \vec{q} = \vec{r} + \vec{b}$$

$$2\vec{p} = \vec{r} + \vec{s} \quad 2\vec{p} = \vec{r} + \vec{b}$$

$$\vec{p} = \frac{\vec{r} + \vec{s}}{2} \quad \vec{p} = \frac{\vec{r} + \vec{b}}{2}$$

$$\vec{p} = \vec{b} \quad \vec{p} = \vec{s}$$

$$\vec{r} = \vec{b} + \vec{p}$$

السؤال الخامس :

(٢) قوتان  $\vec{p} = (1, 1)$  ،  $\vec{q} = (2, 4)$  ،  $\vec{r} = \vec{p} - \vec{q}$  تؤثران فى النقطتين  $p(1, 1)$  ،  $b(4, 0)$  على الترتيب اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحلـ

$$\vec{p} = (1, 1) \quad \vec{q} = (2, 4) \quad \vec{r} = \vec{p} - \vec{q} = (-1, -3)$$

$$\vec{p} \parallel \vec{q} \quad \vec{q} \parallel \vec{r} \quad \vec{p} \parallel \vec{r}$$

$$\vec{p} \parallel \vec{q} \quad \vec{q} \parallel \vec{r} \quad \vec{p} \parallel \vec{r}$$



# المتميز

في

## الرياضيات التطبيقية الأسنانكا

الجزء النظري

٩

حلول التمارين  
الوحدة السادسة

|| ق ||

( سيم ، صيم )

ع

أحمد

الصف الثالث الثانوي  
القسم العلمي  
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري

## الوحدة السادسة .... مركز الثقل

## مركز الثقل

٦ - ١

تمهيد :

نعلم أن الجسم الجاسئ : هو الجسم المكون من عدد كبير جداً من الجسيمات المترابطة مع بعضها البعض بحيث أن المسافة بين أى جسيمين منها تكون ثابتة و لا تتأثر بأى مؤثر خارجى و إذا تحرك جسم كبير بشكل انتقالى فقط فإن كل نقطة منه تتحرك بنفس الشكل تماماً و بالتالى يمكن اعتبار هذا الجسم مكافئاً لنقطة واحدة ممكن في هذه الحالة

أما إذا تحرك جسم كبير عشوائياً ( كانتقال و دوران ) فإن كل نقطة منه تتحرك بشكل مختلف عن غيرها

## مركز ثقل الجسم الجاسئ :

تعريف :

مركز ثقل جسم جاسئ هو نقطة ثابتة فى الجسم يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم ، و لا يتغير موضعها بالنسبة للجسم مهما تغير موضعه بالنسبة للأرض

## ثقل الجسم و مركز ثقله و الجاذبية الأرضية :

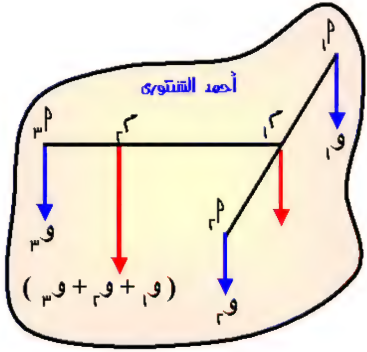
أى جسم بوجه عام يعتبر مجموعة من النقط المادية و بالتالى فإن تأثير الجاذبية الأرضية عليه بقوة وزنه تكون عند كل نقطة من هذه النقاط ، و باعتبار أن الأرض كرة متجانسة ، فإن وزن كل نقطة من هذه النقاط يعمل فى المستقيم الواصل بين هذه النقطة و مركز الأرض ، و لما كانت الأجسام صغيرة جداً بالنسبة للأرض ونظراً لبعدها الكبير عن مركز الأرض فإنه يمكن اعتبار خطوط عمل أوزان النقط المادية المكونة لجسم ما متوازية و بذلك يمكن تركيبها فى قوة

وحيدة تساوى من حيث المقدار مجموع أوزان هذه النقاط و تعمل رأسياً إلى أسفل نحو الأرض من الطبيعى أن الجاذبية الأرضية تؤثر فى جميع أجزاء الجسم ، و لكن عند أخذ العزوم تؤثر قوة الجاذبية الأرضية ( وزن الجسم ) فى نقطة واحدة فيه تسمى بمركز ثقل الجسم

## مركز ثقل نظام من الجسيمات :

باعتبار أن :  $m_1, m_2, m_3, \dots$  مجموعة من الجسيمات المكونة لجسم جاسئ ، و أن :  $w_1, w_2, w_3, \dots$  هى أوزان هذه الجسيمات على الترتيب و تؤثر رأسياً لأسفل كما بالشكل المقابل فيكون :

(١) محصلة القوتين المتوازيتين  $w_1, w_2$



المؤثرتين عند  $m_1, m_2$  على الترتيب و تمر بالنقطة  $m_3$  هى :

$(w_1 + w_2)$  لذلك فإن :  $w_1 \times m_1 + w_2 \times m_2 = w_3 \times m_3$  مهما كان

وضع الجسم بالنسبة للأرض و ذلك لأن البعد بين النقطتين  $m_1, m_2$  ثابت لأن الجسم جاسئ و تظل  $m_3$  ثابتة

(٢) محصلة القوتين المتوازيتين  $(w_1 + w_2)$  ،  $w_3$  هى :

$(w_1 + w_2 + w_3)$  و نفرض أن نقطة تأثيرها  $m_4$  لذلك فإن :

$w_3 \times m_3 = (w_1 + w_2 + w_3) \times m_4$  و تظل المسافة  $m_3 m_4$

ثابتة ، و بالتالى فإن :  $m_4$  نقطة ثابتة مهما كان وضع الجسيمات عند النقاط  $m_1, m_2, m_3$

(٣) بتكرار العمل السابق بالنسبة لأوزان جميع الجسيمات المكونة



للجسم نحصل على وزن الجسم ، و نجد أنه يساوى مجموع جميع أوزان الجسيمات و يمر دائماً بنقطة ثابتة الوضع

**ملاحظة :**

مركز ثقل الجسم الجاسئ يتغير بتغير شكله ، و ذلك لتغير الأبعاد بين الجسيمات المكونة له

**الجسم المنتظم الكثافة :**

هو الجسم الذى تكون كتلته وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة

**ملاحظات :**

(١) إذا كان السلك ( أو القضيب ) منتظم الكثافة

فإن وزنه يتناسب مع طوله

(٢) إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها

**مركز ثقل نقطتين ماديتين ( جسيمين ) :**

إذا كانت كتلة الجسيمين هما :  $m_1$  ،  $m_2$  فى الموضعين  $S_1$  ،  $S_2$  على محور السينات على الترتيب بالنسبة لراصد موجود عند نقطة الأصل كما بالشكل المقابل فإن : مركز ثقل هذين الجسيمين بالنسبة للراصد تتحدد بالعلاقة :

$$S = \frac{m_1 S_1 + m_2 S_2}{m_1 + m_2}$$

**إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٠٢**

جسيمين ماديين كتلة كل منهما ٣ نيوتن ، ٥ نيوتن و المسافة بينهما ٨ أمتار ، أوجد مركز ثقل الجسيمين بالنسبة للجسم ٣ نيوتن

**الحل**

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسيمين يقع على



محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الجسيم

٣ نيوتن فيكون :  $m_1 = 0$  ،  $m_2 = 8$  ،  $S_1 = 0$  ،  $S_2 = 8$

$$S = \frac{8 \times 0 + 0 \times 8}{0 + 8} = 0$$

أى أن : مركز ثقل الجسيمين الماديين يقع على بعد ٥ متر من الجسم ٣ نيوتن و على بعد ٨ متر من الجسم ٥ نيوتن

**ملاحظة :**

مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة كتليهما

**متجه موضع مركز الثقل للجسم الجاسئ بالنسبة لنقطة الأصل :**

إذا كانت :  $m_1$  ،  $m_2$  ،  $m_3$  ، .... ،  $m_n$  أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ ،  $S_1$  ،  $S_2$  ،  $S_3$  ، .... ،  $S_n$  متجهات مواضع هذه الجسيمات منسوبة إلى نقطة الأصل

فإن : متجه الموضع  $S$  لمركز ثقل الجسم الجاسئ منسوباً إلى نقطة الأصل يتحدد بالعلاقة :

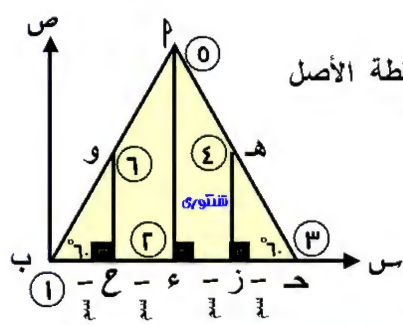
$$(1) \quad S = \frac{m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 + \dots + m_n S_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

$$S = \frac{m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 + \dots + m_n S_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

حيث :  $m_1$  ،  $m_2$  ،  $m_3$  ، .... ،  $m_n$  هي كتل الجسيمات ،  $S$  مقدار عجلة الجاذبية الأرضية ، بقسمة كل من البسط و المقام على  $S$  نحصل على العلاقة

$$(2) \quad S = \frac{m_1 S_1 + m_2 S_2 + m_3 S_3 + \dots + m_n S_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$





نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  ،  
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
و من هندسة الشكل نجد :

$$P = 4 = 2 \times 2 = 4 \text{ ديسم}$$

$$H = 2 = 2 \times 1 = 2 \text{ ديسم}$$

$$C = 2 = 2 \times 1 = 2 \text{ ديسم}$$

و نكون جدول الأوزان واحداثياتها كما يلى :

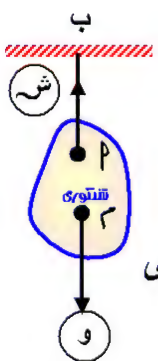
و	هـ	ء	د	ب	م
٦	٤	٢	٣	١	٥
١	٣	٢	٤	٠	٢
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	٠	٠	٠	$\sqrt{3}$

$$\therefore \text{م.س} = \frac{1 \times 6 + 3 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 3 + 0 \times 1 + 2 \times 0}{6 + 4 + 2 + 3 + 1 + 0} = \frac{44}{16} \text{ ديسم}$$

$$\text{ص.م} = \frac{\sqrt{3} \times 6 + \sqrt{3} \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 1 + \sqrt{3} \times 2 \times 0}{6 + 4 + 2 + 3 + 1 + 0} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \text{ ديسم}$$

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{44}{16}, \frac{3\sqrt{3}}{16} \right) \text{ بالنسبة للنقطة ب}$$

**ملاحظة هامة : التعليق الحر للجسم الجاسئ :**



إذا علق جسم جاسئ مقدار وزنه ( و ) تعليقاً حراً  
من إحدى نقطته ( م ) بواسطة خيط فى نقطة التعليق

( ب ) حيث ( شـ ) مقدار قوة شد الخيط

و عندما يتزن الجسم فإن : شـ = و

،  $\therefore$  ( و ) تؤثر رأسياً لأسفل  $\therefore$  ( شـ ) يؤثر رأسياً لأعلى

، خطأ عمل ( و ) ، ( شـ ) ينطبقان

$\therefore$  مركز ثقل الجسم الجاسئ ( م ) يقع على الخط الرأسى  
المار بنقطة التعليق

و يمكن كتابة العلاقات الاتجاهية السابقة بدلالة المركبات فى اتجاهى  
محورى الاحداثيين المتعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$  ، فنحصل على الآتى :

$$\frac{b_1 \cdot s_1 + b_2 \cdot s_2 + \dots + b_n \cdot s_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = s_m$$

$$\frac{c_1 \cdot s_1 + c_2 \cdot s_2 + \dots + c_n \cdot s_n}{c_1 + c_2 + \dots + c_n} = s_v$$

### إجابة تفكير ناقد صفحة ١.٣

هل يتغير موضع مركز الثقل للنظام فى المثال السابق بتغير مواضع  
المحاور المتعامدة ؟ فسر اجابتك

**الحلـ**

لا يتغير مركز الثقل للنظام بتغير مواضع المحاور المتعامدة  
حيث لا يتغير البعد بين موضع مركز الثقل و كل من مواضع الأوزان بتغير مواضع  
المحاور المتعامدة

فإذا اعتبرنا أن : م نقطة الأصل ،  $s_m$  مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة م

ثم اعتبرنا أن : ب نقطة الأصل ،  $s_b$  مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة ب

ثم اعتبرنا أن : د نقطة الأصل ،  $s_d$  مركز ثقل النظام بالنسبة لنقطة د نجد :

$$s_m = s_b = s_d ، b_m = b_b = b_d ، c_m = c_b = c_d$$

$$، d_m = d_b = d_d$$

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١.٤

م ب د مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤ ديسمترات ، النقط ء ،

هـ ، و منتصفات أضلاعه م د ، د م ، م ب على الترتيب وضعت

الأثقال ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ث كجم عند النقط م ، ب ، د ،

ء ، هـ ، و على الترتيب أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من ب

**الحلـ**

١٥ ك ، ١٢ ك ، ١٠ ك ، ١٣ ك و كل يؤثر في منتصف القضيب  
و باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overrightarrow{ب س}$  ،  $\overrightarrow{ب ص}$   
كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتل	١٥ ك	١٢ ك	١٠ ك	١٣ ك
س	٠	٦	١٢	٦
ص	٧,٥	٠	٥	١٢,٥

$$\therefore \text{سم} = \frac{٦ \times ١٣ + ١٢ \times ١٠ + ٦ \times ١٢ + ٠ \times ١٥}{١٣ + ١٠ + ١٢ + ١٥} = ٥,٨ \text{ سم}$$

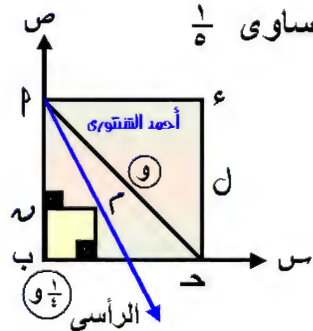
$$\text{ص} = \frac{١٢,٥ \times ١٣ + ٥ \times ١٢ + ٠ \times ١٢ + ٧,٥ \times ١٥}{١٣ + ١٠ + ١٢ + ١٥} = ٦,٧ \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل = ( ٥,٨ ، ٦,٧ ) بالنسبة للنقطة ب  
أى أن : بُعد مركز ثقل السلك عن الضلع  $\overline{ب س} = ٥,٨$  سم  
عن الضلع  $\overline{ب ص} = ٦,٧$  سم

#### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٠٥

علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها ( و ) تعليقاً حراً من الرأس م ،  
و ثبت عند الرأس ب ثقل وزنه  $\frac{1}{4}$  و أثبت أن ظل زاوية ميل

القطر  $\overline{م د}$  على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى  $\frac{1}{6}$



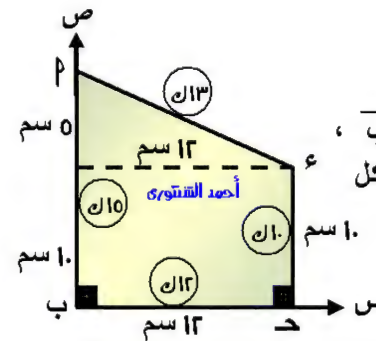
**الحل**  
بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ل  
 $\therefore$  الصفيحة مربعة منتظمة  
 $\therefore$  وزنها يؤثر فى نقطة تلاقى القطرين  
و باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overrightarrow{ب س}$  ،  $\overrightarrow{ب ص}$   
كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

#### مركز ثقل القضبان و الصفائح المنتظمة :

- (١) مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه
- (٢) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمتوازي أضلاع ( مستطيل ، معين ، مربع ) يقع عند نقطة تقاطع القطرين
- (٣) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات هذا المثلث
- (٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة
- (٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسى منتظم يقع عند مركز الشكل السداسى

#### إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٠٥

سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة على شكل شبه منحرف م ب د ع  
فيه : م ب = ١٥ سم ، ب د = ١٢ سم ، د ع = ١٠ سم ،  
و ( م ب د ) = ( د ب ع ) = ٩٠° ، أوجد بُعد مركز ثقل  
السلك عن الضلعين  $\overline{م ب}$  ،  $\overline{ب د}$



**الحل**  
 $\therefore$  السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

$\therefore$  يمكن اعتباره مكون من ٤ قضبان منتظمة م ب ،

$\overline{ب د}$  ،  $\overline{د ع}$  ،  $\overline{م د}$  حيث من هندسة الشكل

$$\overline{م ب} = ١٥ \text{ سم} \quad \therefore \overline{م د} = ١٥ \text{ سم}$$

$$\overline{ب د} = ١٢ \text{ سم} \quad \therefore \overline{ب د} = ١٢ \text{ سم}$$

$$\therefore \overline{م ب} : \overline{ب د} : \overline{د ع} : \overline{م د} = ١٥ : ١٢ : ١٠$$

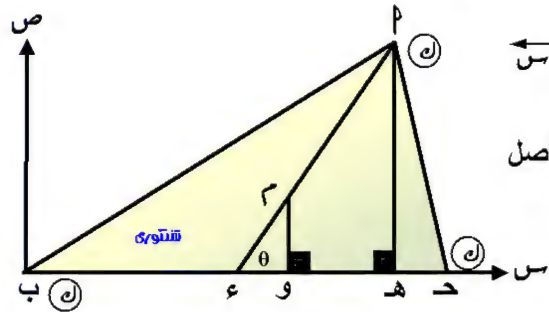
$$= ١٥ : ١٢ : ١٠ : ١٣$$

بفرض أن كتل : م ب ، ب د ، د ع ، م د هى على الترتيب :



أى أن : مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث

### حل آخر



باختیار الاتجاهین المتعامدین ب  $\overleftarrow{S}$   
 ب  $\overleftarrow{S}$  ، كما بالشکل المقابل

و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
من هندسة نجد :  $b = c$  ء

، ب ح = ٢ ب ء

$$\theta \vdash \varphi = \text{def } \vdash \varphi,$$

$$\theta \text{ مء } = \text{ مء } \text{ حء } \theta$$

، هـ ء = ء ، و م ء = ء ،

(1)  $\therefore$  احداثی  $m = (m \text{ء حقا } \theta, m \text{ء حا } \theta)$

يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلي :

ح	ب	پ	
ك	ك	ك	الكتل
ب ب ب	.	ب ب + پ ب حقا	س
.	.	پ ب حا	ص

$$\frac{(2\text{ب}) \times 1 + (1\text{ب} + 0\text{ح}) \times 1 + 1 \times 1}{1 + 1 + 1} = 1 \text{ سم} \therefore$$

$$= ( \text{ب} \text{ء} + \frac{1}{3} \text{ء} \text{پ} \text{ء} \text{حتا} \theta ) \text{وحدة طول}$$

$$\frac{1}{3} \text{ء حا } \theta = \frac{\text{ء حا } \theta + \text{ء حا } \theta + \text{ء حا } \theta}{\text{ء حا } \theta + \text{ء حا } \theta + \text{ء حا } \theta} = \text{صم} ,$$

∴ احداثی مرکز الثقل = (ب ب +  $\frac{1}{3}$  ع حتا  $\theta$  ،  $\frac{1}{3}$  ع حا  $\theta$ )

(٢) بالنسبة للنقطة ب

من (١) ، (٢) ينتج :  $\frac{1}{4} p \text{ ع ح ا } = \text{ع ح ا م} = \theta$

∴  $e_p = e_m = 3$  ∴  $m$  هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث  $p$  بـ  $د$

يكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلي :

الوزن	و	$\frac{1}{4}$ و
س	$\frac{1}{4}$ ل	.
ص	$\frac{1}{4}$ ل	.

$$\therefore \frac{2}{5} = \frac{0. \times 9 + 1 \frac{1}{7} \times 9}{9 + \frac{1}{7} \times 9} = \text{سوم}$$

$$D \frac{r}{s} = \frac{. \times 9 + D \frac{1}{7} \times 9}{9 + \frac{1}{7}} = \text{صم} ,$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{r}{5}, \frac{r}{5})$  بالنسبة للنقطة ب

$$\frac{r}{y} = (npz\Delta) \text{ ظا } \therefore \quad d\frac{r}{y} = np, \quad d\frac{r}{y} = nr \therefore$$

∴  $\angle (b \parallel d) = \angle 20^\circ$  " خواص المربع "

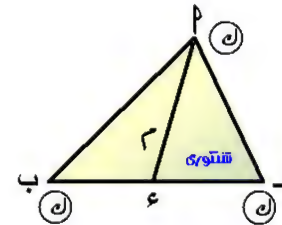
$$(\neg p \vee q) \vee \neg \text{Z0} = (\neg p \vee q) \vee \text{Z0} \therefore$$

$$\therefore \text{طا} (\neg \text{پ} \wedge \text{ز}) = \text{طا} \wedge 20^\circ - \text{طا} (\sim \text{پ} \wedge \text{ز})$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\frac{r}{r} - 1}{\frac{r}{r} \times 1 + 1} = \frac{(\text{ظا } 20^\circ - \text{ظا } 20^\circ)}{(\text{ظا } 20^\circ + 1)} =$$

## إجابة تفكير ناقد صفحة ١.٦

أثبت أن مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث



∴ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث

∴ مركز ثقلها يؤثر في نقطة تلاقي متوسطات المثلث

، ∴ مركز ثقل الكتلتين (ل) عند ب ، (ل) عند ح

هو مركز ثقل كتلة مقدارها ( ٢ ل ) و تؤثر عند ء

**حيث : ء منتصف ب ح**

∴ مركز ثقل الكتلتين (١) عند ٢ ، (٢) عند ٤

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (3 ل) و تؤثر عند م حيث :  $m \in \mathbb{R}^+$  ،

$$r \in \Gamma = r\beta \therefore r \in \times \partial \Gamma = r\beta \times \partial$$

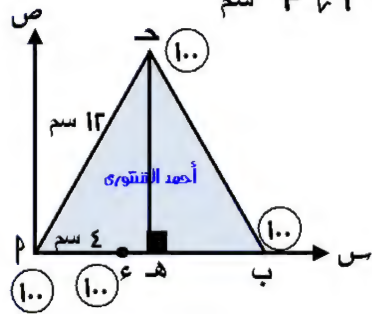
∴ م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث م ب ح



## حل آخر

من الشكل تكون نقطة م نقطة الأصل ، بتوزيع كتلة الصفيحة ٣٠٠ جم عند الرؤوس  
 م ، ب ، د إلى ثلاث كتل متساوية كتلة كل منها ١٠٠ جم  
 من هندسة الشكل نجد : د ه = ١٢ حا ٦٠ = ٣٦ سم  
 و يكون جدول الكتل واحداثياتها كما يلى :

م	ب	د	هـ	
١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠	ل
٠	١٢	٦	٤	س
٠	٠	٣٦	٠	ص



$$\therefore \text{س.م} = \frac{4 \times 100 + 6 \times 100 + 12 \times 100 + 0 \times 100}{100 + 100 + 100 + 100} = 0,0 \text{ سم}$$

$$\text{ص.م} = \frac{36 \times 100 + 0 \times 100 + 0 \times 100 + 0 \times 100}{100 + 100 + 100 + 100} = 1,0 \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل = ( ١,٥ ، ٠,٥ )

بالنسبة للمحورين المتعامدين م س ، م ص

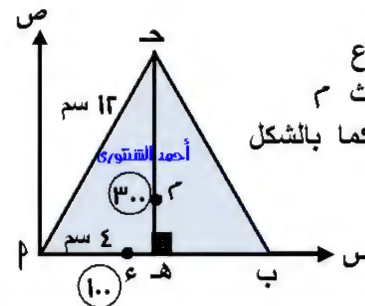
## إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١.٩

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل م ب د هـ فيه :  
 م ب = ٦ سم ، ب د = ١٠ سم ، هـ م  $\supset$  ٦ سم بحيث : م هـ = ٦ سم  
 ثنى المثلث م ب هـ حول الضلع ب هـ حتى أنطبق م ب على ب د  
 تماماً عين موضع مركز ثقل الصفيحة بالنسبة إلى د ب ، د هـ

الحل

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١.٧

فى الشكل المقابل : صفيحة رقيقة كتلتها ٣٠٠ جم  
 على شكل مثلث متساوى الأضلاع م ب د طول  
 ضلعه ١٢ سم ، ألصقت الكتلة ١٠٠ جم فى  
 الصفيحة عند نقطة تثليث م ب  
 عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة  
 للمحورين المتعامدين م س ، م ص



$\therefore$  الصفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع  
 $\therefore$  مركز ثقلها يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث م  
 أى أن : الكتلة ( ٣٠٠ جم ) تؤثر عند نقطة م كما بالشكل  
 من هندسة الشكل نجد :

د هـ = ١٢ حا ٦٠ = ٣٦ سم  
 م ( ٠ ، ٠ ) ، ب ( ٠ ، ١٢ ) ، د ( ٣٦ ، ٦ )  
 ف يكون :

$$= \left( \frac{1}{3} ( 6 + 12 + 0 ) , \frac{1}{3} ( 0 + 0 + 36 ) \right) = ( ٦ , ١٢ )$$

و يكون جدول الكتل واحداثياتها كما  
 فى الجدول المقابل :

م	ب	د
١٠٠	٣٠٠	١٠٠
٠	٦	٤
٠	٣٦	٠

$$\therefore \text{س.م} = \frac{4 \times 100 + 6 \times 300}{100 + 300} = 0,0 \text{ سم}$$

$$\text{ص.م} = \frac{0 \times 100 + 36 \times 300}{100 + 300} = 1,0 \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل = ( ١,٥ ، ٠,٥ )

بالنسبة للمحورين المتعامدين م س ، م ص

## حل تمارين ( ٦ - ١ ) صفحة ١.٩ بالكتاب المدرسى

- أولاً : ضع علامة ( ✓ ) أو علامة ( × ) لكل عبارة مما يأتى :
- (١) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً و لا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم
  - (٢) إذا عُلقت صفيحة غير منتظمة و محدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقاً حرّاً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقى المستقيمتان المتوسطات للمثلث
  - (٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع عند نقطة تقاطع متوسطات المثلث
  - (٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث
  - (٥) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند نقطة تقاطع قطريه
  - (٦) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى قطريه
  - (٧) إذا عُلّق جسم جاسئ تعليقاً حرّاً فإن الخط المستقيم المار بمركز ثقل الجسم يمر بنقطة التعليق
  - (٨) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة المرسومة بينهما و يقسم طولها بنسبة تساوى النسبة بين كتلتيهما
  - (٩) إذا عُلقت صفيحة منتظمة السمك و الكثافة و محدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقاً حرّاً كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقياً

∴ مساحة المربع  $٢ ب و هـ$  = مساحة المستطيل  $و د هـ$  ،  
 ∴ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ،  
 ∴ المساحات تتناسب مع الكتل  
 بفرض أن كتلة المربع  $٢ ب و هـ = ٣ ن$   
 ∴ كتلة المستطيل  $و د هـ = ٢ ن$   
 ∴ الاتجاهين  $ح ب$  ،  $د ع$  متعامدين  
 ∴ كتلة المستطيل  $و د هـ$  تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه  $٢ ( ٣ ، ٢ )$   
 كتلة المربع  $٢ ب و هـ$  فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات  $\Delta و ب هـ$  ،  
 من هندسة الشكل نجد :  $١/٢ = ٢$  و  $١/٢ = ٢$   
 ∴  $٢ = ٢$  و  $٢ = ٢$   
 ∴  $٢ = ٢$  و  $٢ = ٢$   
 ∴  $٢ = ٢$  و  $٢ = ٢$   
 و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٢	٣
س	٢	٦
ص	٣	٢

∴ موضع مركز الثقل هو  $( ٢,٤ ، ٤,٤ )$  بالنسبة لنقطة  $ح$

**ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :**

(ii) أوجد مركز ثقل جسمين ماديين كتلة كل منهما ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن  
و المسافة بينهما ٥ متر



باعتبار أن الخط الواصل بين الجسمين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الجسمين

4 نيوتن فيكون :  $s_1 = 0$  ،  $s_2 = 1$  ،  $s_3 = 0$  ،  $s_4 = 1$  ،  $s_5 = 0$  ،  $s_6 = 1$

$$\mu = \frac{0 \times 7 + . \times 2}{7 + 2} = \therefore \text{مستم}$$

أي أن : مركز ثقل الجسيمين الماديين يقع على بعد ٣ متر من الجسم ٤ نيوتن

(١٢) أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو

التالى :  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{A}$  حجم عند الموضع  $\mathbf{M} = (0,0)$  ،  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{A}$  حجم

عند الموضع  $\mathcal{M}_2$  ،  $(\cdot, 3)$  ،  $\mathcal{L}_3 = 2$  كجم عند الموضع  $\mathcal{M}_3$   $(2, 3)$

$$\frac{q}{z} = \frac{3 \times 2 + 3 \times 1 + . \times 1}{2 + 1 + 1} = 3$$

$$r = \frac{2 \times 1 + . \times 1 + . \times 1}{1 + 1 + 1} = \text{صم}$$

∴ موضع مركز الثقل هو  $(2, \frac{9}{4})$

**(١٣) أوجد موقع مركز ثقل التوزيع الآتي :**

و،  $3 =$  نیوٹن عند  $(1, 2)$  ، و،  $0 =$  نیوٹن عند  $(3, 0)$

$\omega_3 = 4$  نيوتن عند  $(-2, 3)$

(١٠) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازي أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع

11

(I) مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً و لا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم ( ✓ )

(٢) إذا غلقت صفيحة غير منتظمة و محدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقاً حراً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقي المستقيمات المتوسطة للمثلث

( × )

(٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوي الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع عند نقطة تقاطع متوسطات المثلث (✓)

(٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث ( ✓ )

(0) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بشكل متوازي أضلاع يقع عند نقطة تقاطع قطريه (✓)

(7) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوي الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي قطريه ( × )

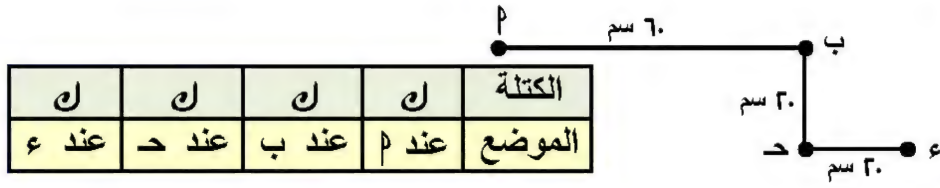
(V) إذا غلق جسم جاسئ تعليقاً حراً فإن الخط المستقيم المار بمركز ثقل الجسم يمر بنقطة التعليق (✓)

(٨) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة المرسومة بينهما و يقسم طولها بنسبة تساوي النسبة بين كتلتيهما ( × )  
التصحيح : يقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة كتلتيهما

(9) إذا غلقت صفيحة منتظمة السمك و الكثافة و محدودة بمثلث متساوي الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقا حراً كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقياً (✓)

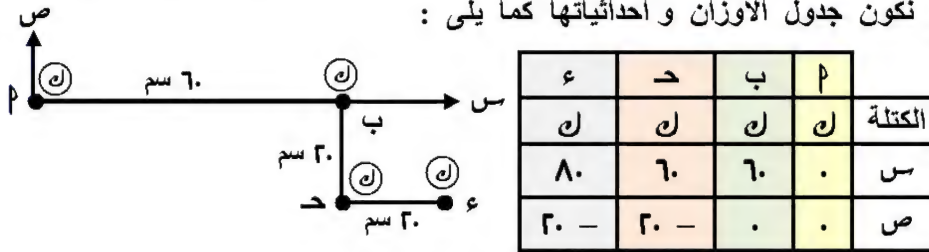
(١٠) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازي أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع ( ✓ )





الحل

نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{P}$  ، العمودى عليه و ذلك باعتبار نقطة  $P$  نقطة الأصل و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

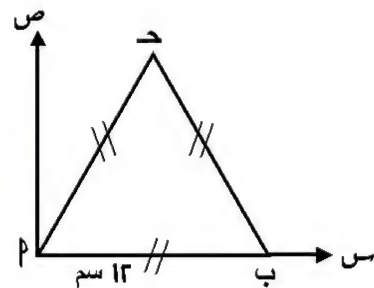


$$\therefore \text{سم } 0 = \frac{20 \times 2 + 20 \times 4 + 20 \times 6 + 20 \times 8 + 20 \times 10}{20 + 20 + 20 + 20 + 20}$$

$$\text{سم } 10 = \frac{(20 - 20) \times 2 + (20 - 20) \times 4 + 20 \times 6 + 20 \times 8 + 20 \times 10}{20 + 20 + 20 + 20 + 20}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(0, 10)$  بالنسبة للنقطة  $P$

الكتلة	٣ جم	٥ جم	٤ جم
الموضع	عند ٣	عند ٥	عند ٤



الحل

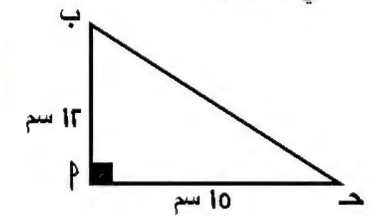
$$\frac{1}{3} = \frac{(2 -) \times 2 + . \times 0 + 2 \times 3}{2 + 0 + 3} = \text{سم}$$

$$\text{سم } 2 = \frac{3 \times 2 + 3 \times 0 + (1 -) \times 3}{0 + 2 + 3}$$

$\therefore$  موضع مركز الثقل هو  $(2, \frac{1}{3})$

(١٤) عين مركز ثقل كل من المجموعات الآتية حسب البيانات المعطاة في الجدول :

الكتلة	٢٠ جم	٤٠ جم	٣٠ جم
الموضع	عند ٢	عند ٤	عند ٦



الحل

نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{P}$  ،  $\vec{P}$  ذلك باعتبار نقطة  $P$  نقطة الأصل و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٢٠	٤٠	٣٠
الموضع	عند ٢	عند ٤	عند ٦

$$\therefore \text{سم } 0 = \frac{12 \times 30 + 0 \times 40 + 0 \times 20}{30 + 40 + 20}$$

$$\text{سم } \frac{16}{3} = \frac{0 \times 30 + 12 \times 40 + 0 \times 20}{30 + 40 + 20}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(0, \frac{16}{3})$  بالنسبة للنقطة  $P$

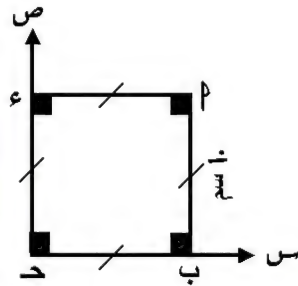
و	هـ	ح	پ	
٢	٢	٣	٨	الكتلة
١٠	١٠	٥	٠	س
٠	٠	٥	٠	ص

$$\therefore \text{س} = \frac{10 \times 2 + 10 \times 2 + 5 \times 3 + 0 \times 8}{2 + 2 + 3 + 8} = \frac{130}{17} \text{ سم}$$

$$\text{ص} = \frac{0 \times 2 + 0 \times 2 + (5 - 0) \times 3 + 0 \times 8}{2 + 2 + 3 + 8} = 1.0 \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(1.0, \frac{130}{17})$  بالنسبة للنقطة پ

الكتلة	٢٠ جم	٣٠ جم	١٠ جم	٤٠ جم
الموضع	عند پ	عند ب	عند د	عند ء

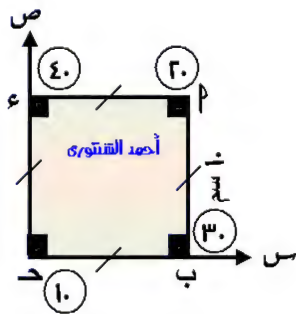


الحل

كما بالشكل المقابل : نقطة د نقطة الأصل  
و نكون جدول الأوزان واحداثياتها كما يلى :

پ	ب	د	ء	
٢٠	٣٠	١٠	٤٠	الوزن
١٠	١٠	٠	٠	س
١٠	٠	٠	١٠	ص

$$\therefore \text{س} = \frac{0 \times 40 + 0 \times 10 + 10 \times 30 + 10 \times 20}{40 + 10 + 30 + 20} = 0 \text{ سم}$$



نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{p}$  ،  $\vec{s}$   
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة پ نقطة الأصل  
و من هندسة الشكل نجد :

$$پ = ١٢ \text{ سم} \quad \text{ح} = ٦ \sqrt{3} \text{ سم}$$

و نكون جدول الكتل واحداثياتها كما يلى :

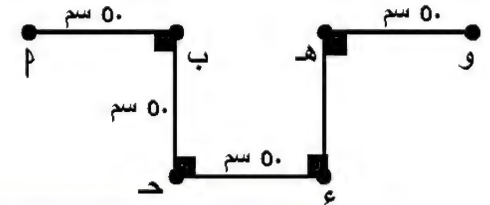
پ	ب	د	
٤	٥	٣	الكتلة
٠	١٢	٦	س
٠	٠	٦\sqrt{3}	ص

$$\therefore \text{س} = \frac{6 \times 3 + 12 \times 0 + 0 \times 4}{3 + 0 + 4} = \frac{18}{7} \text{ سم}$$

$$\frac{18}{7} \text{ سم}$$

$$\text{ص} = \frac{3\sqrt{3} \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 0}{3 + 0 + 4} = \frac{9\sqrt{3}}{7} \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{18}{7}, \frac{9\sqrt{3}}{7})$  بالنسبة للنقطة پ



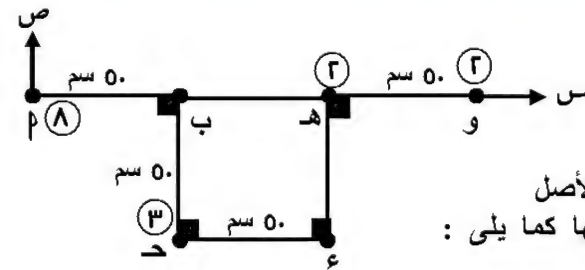
الكتلة	٨ ث جم	٣ ث جم	٢ ث جم	٢ ث جم
الموضع	عند پ	عند د	عند هـ	عند و

الحل

نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{p}$  ،  $\vec{s}$

كما بالشكل المقابل

و ذلك باعتبار نقطة پ نقطة الأصل  
و نكون جدول الكتل واحداثياتها كما يلى :



$$\text{ص}_م = \frac{\overline{3} \times 20 + (\overline{3} - \overline{1}) \times 0 + (\overline{3} - \overline{1}) \times 10 + \overline{3} \times 1}{20 + 0 + 10 + 1} = \text{ص}_م$$

$$\frac{1}{2} \overline{3} \text{ ل وحدة طول}$$

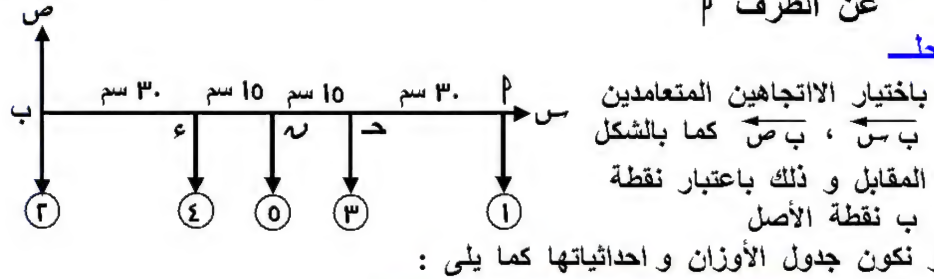
∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{2} \overline{3} \text{ ل}, 0)$  بالنسبة للنقطة ن

ثالثاً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(10) قضيب منتظم طوله ٩ سم و كتلته ٥ كجم ، ح ، د ، ع نقطتا تثليثيه

من ناحية م ، وُضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند  
النقط م ، ب ، د ، ع على الترتيب ، عين مركز ثقل المجموعة  
عن الطرف م

الحل



الكتلة	١	٢	٣	٤	٥
س	٩	٠	٦	٣	٤٠

$$\text{∴ ص}_م = \frac{50 \times 0 + 30 \times 2 + 60 \times 3 + 0 \times 4 + 90 \times 1}{0 + 2 + 3 + 4 + 1} = 21 \text{ سم}$$

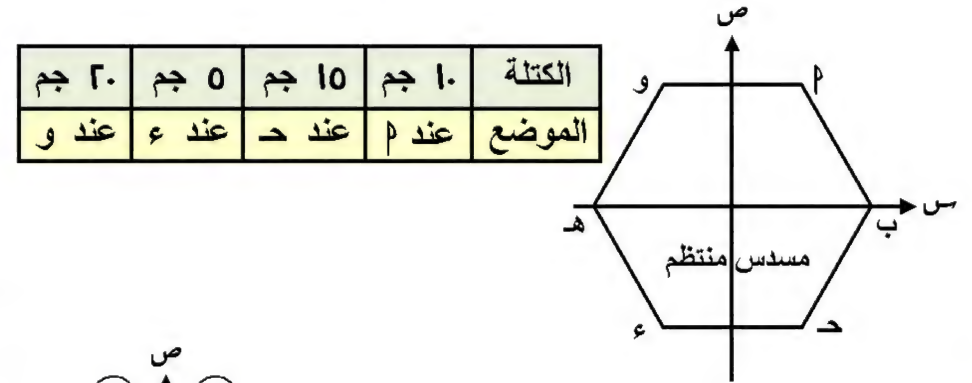
أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن ب مسافة : ٢١ سم ، عن م مسافة : ٤٩ سم

(17) م قضيب غير منتظم طوله ٣ سم و وزنه ٥٠٠ ث جم ، ثبت

ثقلان مقدارهما ١٠٠ ث جم ، ٢٠٠ ث جم عند الطرفين م ، ب على  
الترتيب فأصبح مركز ثقل المجموعة فى نقطة منتصف القضيب عين

$$\text{ص}_م = \frac{10 \times 20 + 0 \times 10 + 0 \times 30 + 10 \times 20}{20 + 0 + 30 + 20} = \text{ص}_م$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(0, 6)$  بالنسبة للنقطة ح



الحل

كما بالشكل المقابل : نقطة ن ( مركز المسدس )  
نقطة الأصل ، بفرض أن :  
طول ضلع المسدس = ٢ ل وحدة طول  
من هندسة الشكل :  
م ب = ح د = ع ز = ٦ ل = ٣ ل وحدة طول  
بالمثل : د ح = ع ز = ٦ ل = ٣ ل وحدة طول  
و نكون جدول الأوزان واحداثياتها كما يلى :

الكتلة	١٠	١٥	٥	٢٠
س	١٠	١٥	٥	٢٠
ص	١٠	١٥	٥	٢٠

$$\text{∴ ص}_م = \frac{(10 - 20) \times 20 + (15 - 5) \times 0 + 10 \times 10 + 10 \times 1}{20 + 0 + 10 + 1} = \text{ص}_م$$



الكتلة	ب	ح	د	س
٢	٢	١١	٣	٢
٢	٤	٠	٢	٢
٢	٠	٠	٢	٢

$$\therefore \text{س.م} = \frac{٢ \times ٢ + ١١ \times ٢ + ٣ \times ٢ + ٢ \times ٢}{٢ + ١١ + ٣ + ٢} = ٢ \text{ سم}$$

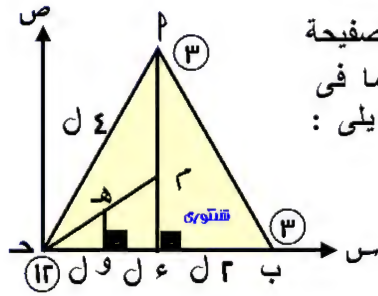
$$\text{ص.م} = \frac{٢ \times ٢ + ١١ \times ٢ + ٣ \times ٢ + ٢ \times ٢}{٢ + ١١ + ٣ + ٢} = ٢ \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز ثقل المجموعة = ( ٢ ، ٢ ) بالنسبة للنقطة د

$\therefore$  احداثى نقطة هـ = ( ٢ ، ٢ )

$\therefore$  احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف مـ د

حل آخر



بتوزيع كتلة الصفيحة ( ٣ كجم ) على رؤوس الصفيحة واختيار الاتجاهين المتعامدين و ايجاد الأطوال كما فى الحل السابق يصبح جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	ب	ح	د	س
٣	٣	١٢	٠	٠
٢	٤	٠	٠	٠
٢	٠	٠	٠	٠

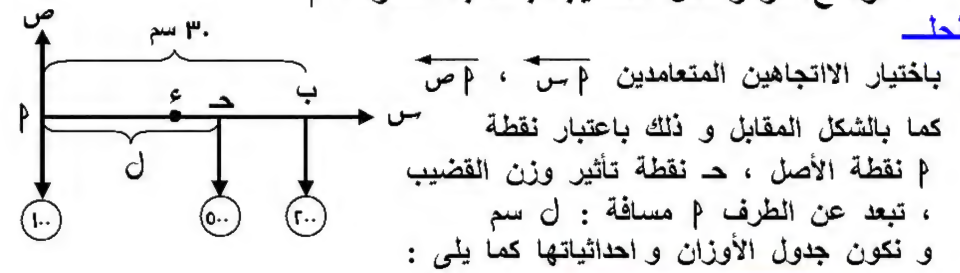
$$\therefore \text{س.م} = \frac{٣ \times ٣ + ١٢ \times ٣ + ٠ \times ٣ + ٠ \times ٣}{٣ + ١٢ + ٠ + ٠} = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{ص.م} = \frac{٣ \times ٣ + ١٢ \times ٣ + ٠ \times ٣ + ٠ \times ٣}{٣ + ١٢ + ٠ + ٠} = ٣ \text{ سم}$$

$\therefore$  احداثى مركز ثقل المجموعة = ( ٣ ، ٣ ) بالنسبة للنقطة د

موضع مركز ثقل القضيب بالنسبة للطرف مـ

الحل



$$\therefore \text{س.م} = \frac{١٠٠ \times ٠ + ٢٠٠ \times ١.٥ + ٣٠٠ \times ٣}{١٠٠ + ٢٠٠ + ٣٠٠} = ١.٥ \text{ سم}$$

$$= \frac{١}{٨} (٦٠ + ٥٠)$$

$$\therefore \frac{١}{٨} (٦٠ + ٥٠) = ١٥$$

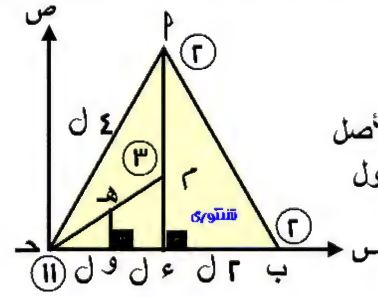
$\therefore$  س.م = ١٥ سم ، ومنها : ل = ١٢ سم أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن مـ مسافة : ١٢ سم

(١٧) مـ ب د صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم

مـ مركز ثقلها ، وُضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند

الرؤوس مـ ، ب ، د على الترتيب ، برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف مـ د

الحل



نختار اتجاهين متعامدين مـ د ، مـ د  
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل ، بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ٤ ل وحدة طول  
 $\therefore$  مـ د = ٤ ل حـا  $٢ = ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢$  وحدة طول

$$\text{هـ} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١ \text{ وحدة طول}$$

$$\text{و} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١ \text{ وحدة طول}$$

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

### حل ثالث

فيكون : مركز ثقل المجموعة عند منتصف  $M$  حـ

## في وضع الاتزان



مركز ثقل المجموعة الكونية من وزن الصفيحة  
و الثقل ( ١٠ ث كجم ) عند ب

عند وضع الاتزان تكون نقطة م واقعة على الخط الرأسى المار بنقطة م

،  $m \in \overline{m \cdot b}$  کما بالشکل بحیث :  $1. \times m = 2. \times m$  ،

$$\text{ب } \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^3}} \therefore \qquad \text{ب } \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} \therefore$$

$$P_{\frac{1}{2}} = P_{\frac{1}{2}} \therefore \quad P_{\frac{1}{2}} = P_{\frac{1}{2}} \therefore$$

، من المثلث  $pqr$  فإن :  $\angle pqr = (r, p, q)$

∴ قياس زاوية ميل القطر على الرأسى  $\overline{p} = \text{طا}^{-1} \left( \frac{1}{e} \right) = 11^{\circ} 19'$

## حل آخر

و نڪون جدول ڪٽل و احداثياتها كما يلي :

ب	٢	
ا	٤	الكتابة
د	د	س
د	د	ص

$$\therefore \text{مس} = \frac{1 \times 2 + 2 \times 1}{1 + 2} = \frac{4}{3} \text{ وحدة طول}$$

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{0.2 \times 1. + 0.8 \times 2.}{1. + 2.} = 1.6 \text{ ص.م}$$

∴ احداثي مركز ثقل المجموعة ( م ) =  $(\frac{1}{3} , \frac{1}{3})$  بالنسبة للنقطة ء

$$\partial \frac{7}{8} = 92 \quad , \quad \partial \frac{4}{8} = \partial \frac{7}{8} - \partial 2 = 90 \therefore$$

$$\therefore \frac{3}{7} = (p \geq q) \text{ ظا} \quad \therefore (p \geq q) = \frac{7}{19} = 0.368$$

$$(p \vee \neg q) \vee (p \vee r) = (p \vee (q \wedge r)) \therefore$$

$$^{\circ}11/19 = ^{\circ}20 - ^{\circ}07/19 =$$

∴ قياس زاوية ميل القطر على الرأسى  $\overline{m} = 19^\circ 11'$

(١٩) في الشكل المقابل :  $M$  ب سلك رفيع منتظم

الكثافة تُنسى عند ب ، د ، أوجد بُعد مركز

الثقل عن كل من  $\overline{AB}$  ،  $\overline{CB}$  ثم أوجد

فم وضع الاتزان قياس زاوية ميل  $\mu$

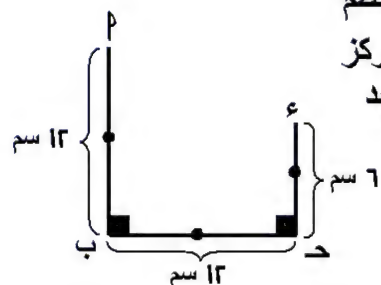
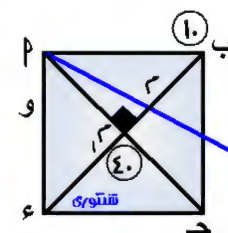
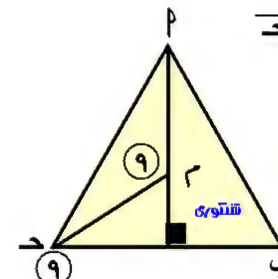
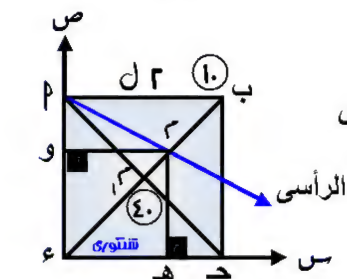
علم الرأس إذا علق السلك من ٢

تعلیقاً حراً



∴ السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

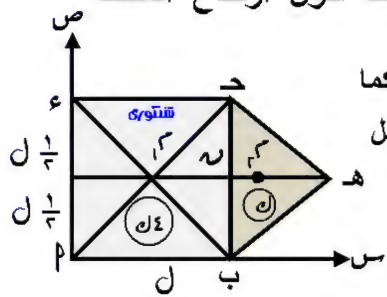
∴ يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان منتظمة  $\overline{p}$  ،  $\overline{b}$  ،  $\overline{d}$



(٢٠) م ب د ع مربع طول ضلعه ل ، رُسم على ب د مثلث متساوى

الساقين ب د ه بحيث يقع الرأس ه خارج المربع ، أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السمك و الكثافة المحدودة بالشكل الناتج ، علماً بأن طول ضلع المربع يساوى ضعف طول ارتفاع المثلث

**الحل**



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{m}_s$  ،  $\vec{m}_v$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة الأصل ،  
 $\therefore$  مساحة المربع =  $L \times L = L^2$  ،  
 مساحة المثلث =  $L \times \frac{1}{2} \times L = \frac{1}{2} L^2$

$\therefore$  مساحة المربع : مساحة المثلث = ٤ : ١

،  $\therefore$  الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة  $\therefore$  المساحات تتناسب مع الكتل ،  
 بفرض أن كتلة المربع = ٤ ل  $\therefore$  كتلة المثلث = ل

حيث : كتلة المربع تؤثر عند نقطة تلاقي قطريه م (  $L \times \frac{1}{2}$  ،  $L \times \frac{1}{2}$  )

، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقي متوسطاته م (  $L \times \frac{1}{2}$  ،  $L \times \frac{1}{2}$  )

حيث : م ه =  $L \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} L$  ، م ب =  $L \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} L$

$\therefore$  م م =  $L \times \frac{1}{2} + L \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} L$

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	٤ ل	ل
س	$L \times \frac{1}{2}$	$L \times \frac{1}{2}$
ص	$L \times \frac{1}{2}$	$L \times \frac{1}{2}$

$\therefore$  س م =  $\frac{L \times \frac{1}{2} \times 4 + L \times \frac{1}{2} \times 1}{4L + L} = \frac{19}{10} L$

، ص م =  $\frac{L \times \frac{1}{2} \times 4 + L \times \frac{1}{2} \times 1}{4L + L} = \frac{1}{5} L$

$\therefore$  موضع مركز الثقل هو (  $L \times \frac{1}{2}$  ،  $L \times \frac{19}{10}$  ) بالنسبة لنقطة م

،  $\therefore$  م ب = ١٢ سم ، ب د = ١٢ سم ، د ع = ٦ سم  
 $\therefore$  م ب : ب د : د ع = ١ : ٢ : ٢  
 $\therefore$  الكتل تتناسب مع الأطوال  
 $\therefore$  بفرض أن كتل : م ب ، ب د ، د ع  
 هى على الترتيب : ١ ، ٢ ، ٢  
 ، و كل يؤثر فى منتصف القضيب  
 و باختيار الاتجاهين المتعامدين ب م ، ب د  
 كما بالشكل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
 يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتل	١	٢	٢
س	١٢	٦	٠
ص	٣	٠	٦

$\therefore$  س م =  $\frac{12 \times 1 + 6 \times 2 + 0 \times 2}{1 + 2 + 2} = 2.8$  سم

، ص م =  $\frac{3 \times 1 + 0 \times 2 + 6 \times 2}{1 + 2 + 2} = 3$  سم

$\therefore$  احداثى مركز الثقل = ( ٢.٨ ، ٣ ) بالنسبة للنقطة ب

أى أن : بُعد مركز ثقل السلك عن الضلع م ب = ٢.٨ سم

، عن الضلع ب د = ٣ سم

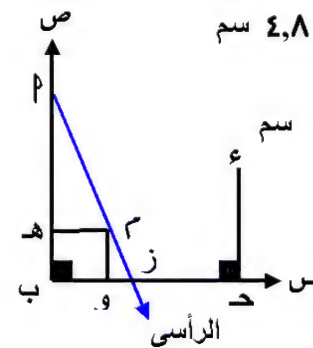
عند التعليق من م يكون : م ه = ١٢ - ٣ = ٩ سم

، م ه = ٢.٨ سم

$\therefore$  طا ( م ه ) =  $\frac{2.8}{9}$

$\therefore$  ق ( م ه ) =  $\frac{2.8}{9}$

$\therefore$  قياس زاوية ميل م ب على الرأسى =  $\frac{2.8}{9}$



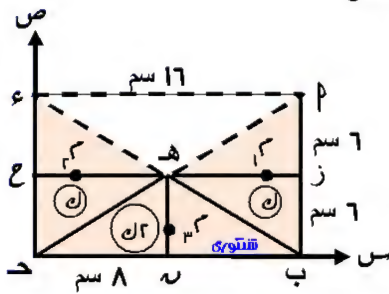


(٢٢) م ب د ع صفيحة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطيل فيه

م ب = ١٢ سم ، ب د = ١٦ سم ، هـ نقطة تقاطع قطريه م د ،  
ب ع ، فصل المثلث م هـ ع و ثبت فوق المثلث ب هـ د ، أوجد  
مركز ثقل الصفيحة في هذه الحالة ، و إذا علقت الصفيحة تعليقا  
حرًا من نقطة د ، فأوجد ظل زاوية ميل د ب على الرأسى

**الحل**

نختار اتجاهين متعامدين د س ، د ص كما بالشكل  
المقابل وذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل  
من هندسة الشكل :



مساحة المثلث م ب هـ = مساحة المثلث ع د هـ

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \text{ سم}^2$$

مساحة المثلث م ع هـ = مساحة المثلث ب د هـ

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 6 = \frac{1}{2} \times 6 \times 16 \text{ سم}^2$$

∴ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل  
بفرض أن كتلة المثلث م ب هـ = ٨ ، تؤثر فى ٢

$$\text{حيث : } ٢ = \frac{٢}{٨} \times ٨ = \frac{٢}{٨} \times ٨ \text{ سم} \therefore ٢ = ٨ \times \frac{٢}{٨} = ٢ \text{ سم}$$

، كتلة المثلث ع د هـ = ٨ ، تؤثر فى ٢

$$\text{حيث : } ٢ = \frac{٢}{٨} \times ٨ = \frac{٢}{٨} \times ٨ \text{ سم} \therefore ٢ = ٨ \times \frac{٢}{٨} = ٢ \text{ سم}$$

∴ مساحة ب د هـ فى الوضع الجديد = ٢ ، تؤثر فى ٢

$$\text{حيث : } ٢ = \frac{٢}{٨} \times ٨ = \frac{٢}{٨} \times ٨ \text{ سم} \therefore ٢ = ٨ \times \frac{٢}{٨} = ٢ \text{ سم}$$

و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

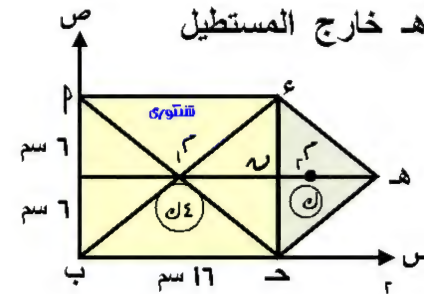
الكتل	٢	٢	٨
س	$\frac{٢}{٨}$	$\frac{٢}{٨}$	٨
ص	٦	٦	٢

(٢١) تتكون صفيحة من جزئين : مستطيل م ب د ع فيه :

م ب = ١٢ سم ، ب د = ١٦ سم ، مثلث متساوى الساقين

د هـ ع فيه : د هـ = ١٠ سم ، هـ خارج المستطيل

عين مركز ثقل المجموعة



**الحل**

باختيار الاتجاهين المتعامدين ب س ،  
ب ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار  
نقطة ب نقطة الأصل

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} = ١٢ \times ١٦ = ١٩٢ \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨ \text{ سم}^2$$

حيث من هندسة الشكل : هـ س = ٨ سم ، د هـ = ١٢ سم

∴ مساحة المستطيل : مساحة المثلث = ٤ : ١

∴ الصفيحة رفيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل  
بفرض أن كتلة المستطيل = ٤ ∴ كتلة المثلث = ١

حيث : كتلة المربع تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه ٢ ( ٨ ، ٦ )

، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقى متوسطاته ٢ ( ٦ ، ٤ )

$$\text{حيث : } ٢ = \frac{٢}{٨} \times ٨ = \frac{٢}{٨} \times ٨ \text{ سم} \therefore ٢ = ٨ \times \frac{٢}{٨} = ٢ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ب } ٢ = ١٦ + \frac{٢}{٨} = ١٦ \text{ سم} \text{ و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :}$$

الكتل	٤	١
س	$\frac{٢}{٨}$	٨
ص	٦	٦

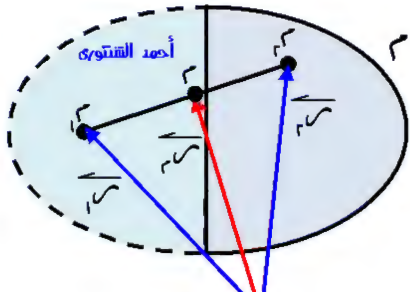
$$\therefore \text{س} = \frac{\frac{٢}{٨} \times ١ + ٨ \times ٤}{١ + ٤} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\text{ص} = \frac{٦ \times ١ + ٦ \times ٤}{١ + ٤} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

∴ موضع مركز الثقل هو ( ٦ ، ٣ ) بالنسبة لنقطة ب

## طريقة الكتلة السالبة

٢ - ٦



بفرض أن : جسماً كتلته  $L$  و مركز ثقل  $M$   
و اقتطعنا منه جزءاً كتلته  $L_1$  ، و مركز  
ثقله  $M_1$  كما بالشكل المقابل

فإن الجزء المتبقى ستصبح كتلته هي :  
(  $L - L_1$  ) و مركز ثقله  $M$

و إذا كان :  $\vec{r}_1$  ،  $\vec{r}_2$  ،  $\vec{r}_3$  متجهات موضع و  
 $M$  ،  $M_1$  ،  $M$  على الترتيب بالنسبة لنقطة الأصل ( و ) فإن :

$$\vec{r}_M = \frac{L_1 \vec{r}_{M_1} + (L - L_1) \vec{r}_M}{L} \quad \text{بضرب الطرفين } \times L \text{ ينتج :}$$

$$L \vec{r}_M = L_1 \vec{r}_{M_1} + (L - L_1) \vec{r}_M$$

$$\therefore (L - L_1) \vec{r}_M = L_1 \vec{r}_{M_1} - L \vec{r}_M$$

$$\therefore \vec{r}_M = \frac{L \vec{r}_M - L_1 \vec{r}_{M_1}}{L - L_1}$$

بالتعويض عن  $\vec{r}_M$  ،  $\vec{r}_{M_1}$  بدلالة مركباتها الجبرية فى اتجاه المحاور  
المتعامدة  $\vec{Ox}$  ،  $\vec{Oy}$  نحصل على احداثيات الجزء المتبقى و هما :

$$\vec{r}_M = \frac{L \vec{r}_M - L_1 \vec{r}_{M_1}}{L - L_1} \quad , \quad \vec{r}_{M_1} = \frac{L \vec{r}_M - L_1 \vec{r}_{M_1}}{L - L_1}$$

حيث : (  $\vec{r}_M$  ،  $\vec{r}_{M_1}$  ) مركز ثقل الجسم الأسمى و كتلته  $L$  ،  
(  $\vec{r}_M$  ،  $\vec{r}_{M_1}$  ) مركز ثقل الجسم المقتطع و كتلته  $L_1$

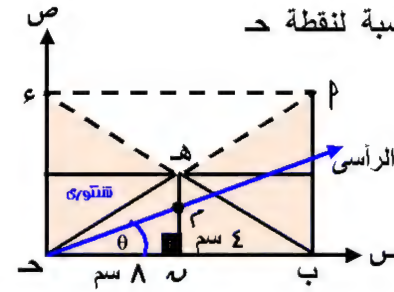
$$\therefore \vec{r}_M = \frac{\frac{1}{3} \times L + \frac{2}{3} \times L + L \times L}{L + L + L} = \vec{r}_M$$

$$\vec{r}_{M_1} = \frac{1 \times L + 1 \times L + 2 \times L}{L + L + L} = \vec{r}_{M_1}$$

$\therefore$  موضع مركز الثقل هو (  $\vec{r}_M$  ،  $\vec{r}_{M_1}$  ) بالنسبة لنقطة  $O$   
عند التعليق من  $O$  كما بالشكل المقابل :

$$\text{يكون : } \theta = \frac{\vec{r}_{M_1}}{\vec{r}_M} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ظل زاوية ميل } \vec{OB} \text{ على الرأسى} = \frac{1}{2}$$



أحمد الشنتوي

$$ص_د = \frac{ل \times 1.0 + ل \times 1.0 + . \times 1.0 + . \times 1.0}{1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0} = \frac{1}{4} ل$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو :  $(\frac{1}{4} ل, \frac{1}{4} ل)$  بالنسبة لنقطة م  
أى عند نقطة هـ " مركز المربع ، نقطة تلاقى قطرى المربع "  
طرق أخرى :

(١) ∴ الكتل متساوية عند رؤوس المربع م ب د ع

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة هـ

(٢) مركز ثقل القوتين ( ١.٠ جم ) عند م ،

( ١.٠ جم ) عند ب هو مركز ثقل كتلة

مقدارها ( ٢.٠ جم ) و يؤثر عند

ع منتصف م ب

، مركز ثقل القوتين ( ١.٠ جم ) عند د

، ( ١.٠ جم ) عند ع هو مركز ثقل كتلة

مقدارها ( ٢.٠ جم ) و يؤثر عند

ع منتصف د ع

∴ مركز ثقل القوتين ( ٢.٠ جم ) عند ع ، ( ٢.٠ جم ) عند د ،

هو مركز ثقل كتلة مقدارها ( ٤.٠ جم ) و يؤثر عند هـ

ثانياً : مركز ثقل الكتلة المرفوعة ( ١.٠ جم ) عند د

هو :  $(ل, ل)$

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

$$∴ س_م = \frac{ل \times 1.0 - \frac{1}{4} ل \times 4.0}{1.0 - 4.0}$$

$$\frac{1}{4} ل =$$

$$ص_م = \frac{ل \times 1.0 - \frac{1}{4} ل \times 4.0}{1.0 - 4.0} = \frac{1}{4} ل$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو :  $(\frac{1}{4} ل, \frac{1}{4} ل)$  بالنسبة لنقطة م

و هذه القاعدة تعنى : عند ايجاد مركز ثقل الجسم المتبقى ينظر إليه  
كما لو كان مكوناً من جسمين هما :

(١) الجسم الأسمى و كتلته ( ل )

(٢) الجسم المقتطع باعتبار كتلته ( - ل )

لذلك سُميت الكتلة السالبة

### إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١١٤

هل يمكنك حل مثال (١) بطرق أخرى عرفتھا من الدرس السابق

وضح ذلك و اكتب هذه الطرق الأخرى إن وجدت

" وضعت أربع كتل متساوية مقدار كل منها ١.٠ جم عند رؤوس المربع

م ب د ع

أولاً : عين مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى م ب ، م ع ،

ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند الرأس د فعين مركز ثقل

المجموعة المتبقية "

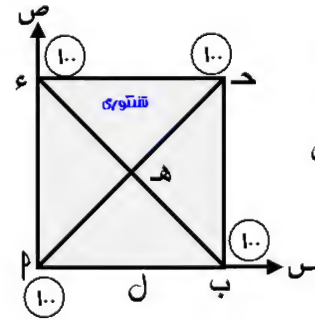
### الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص كما

بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة الأصل

و بفرض أن : طول ضلع المربع = ل وحدة طول

أولاً : يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :



م	ب	د	ع
١.٠	١.٠	١.٠	١.٠
٠	ل	ل	٠
٠	٠	٠	ل

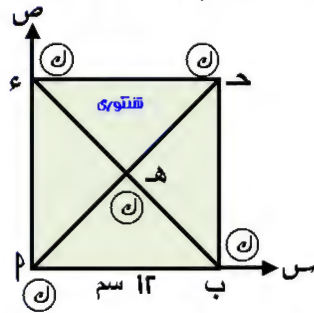
$$∴ س_د = \frac{. \times 1.0 + ل \times 1.0 + ل \times 1.0 + . \times 1.0}{1.0 + 1.0 + 1.0 + 1.0}$$



## إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١٥

وُضعت خمس كتل متساوية عند الرؤوس  $p$  ،  $b$  ،  $d$  ،  $e$  ،  $h$  لمربع  $p$  ب د هـ حيث  $h$  ملتقى قطريه و طول ضلع المربع ١٢ سم عين مركز ثقل المجموعة ، و إذا رُفعت الكتلة الموجودة عند  $b$  فعين مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين  $p$  ب ،  $p$  د

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $p$  س ،  $p$  ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة  $p$  نقطة الأصل وبفرض أن كل كتلة عند كل رأس  $ل$

	هـ	ب	د	ع	هـ
الكتلة	ل	ل	ل	ل	ل
س	٠	١٢	١٢	٠	٦
ص	٠	٠	١٢	١٢	٦

يكون جدول الكتل والاحداثيات كما يلى :

$$س_م = \frac{ل \times ٠ + ل \times ١٢ + ل \times ١٢ + ل \times ٠ + ل \times ٦}{ل + ل + ل + ل + ل} = ٦$$

$$ص_م = \frac{ل \times ٠ + ل \times ٠ + ل \times ١٢ + ل \times ١٢ + ل \times ٦}{ل + ل + ل + ل + ل} = ٦$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : (٦ ، ٦) بالنسبة لنقطة  $p$

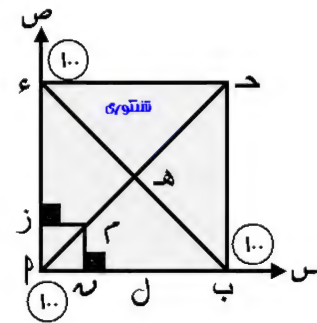
أى عند مركز المربع

عند رفع الكتلة الموجودة عند  $b$  :

$$س_ن = \frac{ل \times ٠ - ل \times ١٢}{ل - ل} = ٢,٥$$

$$ص_ن = \frac{ل \times ٠ - ل \times ١٢}{ل - ل} = ٧,٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : (٢,٥ ، ٧,٥) بالنسبة لنقطة  $p$



طرق أخرى :

(١) باعتبار نقطة  $p$  نقطة الأصل

يكون جدول الكتل والاحداثيات كما يلى :

	هـ	ب	د	ع	هـ
الكتلة	ل	ل	ل	ل	ل
س	٠	ل	٠	٠	ل
ص	٠	٠	ل	ل	٠

$$س_م = \frac{ل \times ٠ + ل \times ١٢ + ل \times ٠ + ل \times ٠ + ل \times ١٢}{ل + ل + ل + ل + ل} = ٦$$

$$ص_م = \frac{ل \times ٠ + ل \times ٠ + ل \times ١٢ + ل \times ١٢ + ل \times ٠}{ل + ل + ل + ل + ل} = ٦$$

(٢) مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند  $b$  ، (١٠٠ جم) عند  $هـ$  ،

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٢٠٠ جم) و يؤثر عند  $هـ$

∴ مركز ثقل القوتين (١٠٠ جم) عند  $p$  ، (٢٠٠ جم) عند  $هـ$  ،

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (٣٠٠ جم) و يؤثر عند  $م$

$$حيث : ٢م = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١م = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}م$$

$$∴ (٢٠٠ جم) = ٢٠٠^\circ \text{ " خواص المربع "}$$

$$∴ س_م = \frac{١}{٢}م = ٢٠٠^\circ \text{ حنا } ٢٠٠^\circ$$

$$ص_م = \frac{١}{٢}م = ٢٠٠^\circ \text{ حنا } ٢٠٠^\circ$$

(٣) ∴ الكتل متساوية عند رؤوس المثلث  $p$  ب د

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث  $p$  ب د

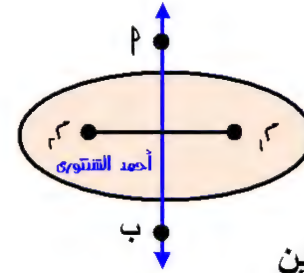
$$∴ (٠,٠) م ، (٠,ل) ب ، (ل,٠) د ، (٠,٠) ع$$

$$∴ م = ((٠ + ل + ٠) \times \frac{١}{٢} , (٠ + ٠ + ل) \times \frac{١}{٢}) = (٠,٠)$$

$$= (٠,٠)$$

**مركز ثقل بعض الأجسام التى لها خصائص تماثل :**

تماثل صفيحة هندسية رقيقة منتظمة الكثافة باعتبار  $\vec{P}$  محور تماثل للصفيحة المنتظمة لذا فهو يُقسم الصفيحة إلى جزأين متماثلين تماماً من حيث الشكل و بالتالى من حيث الكتلة كما فى الشكل المقابل



و بفرض أن :  $m_1$  ،  $m_2$  هما مركزي ثقل الجزأين

من الواضح أن : محور التماثل يقطع  $m_1, m_2$  على التعامد من منتصفها

، ∴ مركز ثقل الصفيحة هو نفسه مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين عند  $m_1$  ،  $m_2$  ∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند منتصف  $m_1, m_2$  أى على محور التماثل ، و من ذلك نستنتج :

**إذا وجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على هذا المحور**

**بعض المجسمات الهندسية المنتظمة الكثافة :**

تماثل المجسمات الهندسية يماثل تماماً تماثل الأشكال الهندسية بعد الاستعاضة عن محور التماثل بمستوى تماثل كما بالشكل المقابل و من ذلك نستنتج :

**إذا وجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة فإن مركز ثقله يقع على هذا المستوى**

من التماثل السابق للشكل الهندسى المنتظم و المجسم الهندسى المنتظم يمكن تحديد بعض الحالات الخاصة لمركز الثقل كما يلى :

(١) مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع فى مركز الدائرة

(٢) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة

يقع فى مركز الدائرة

(٣) مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(٤) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(٥) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازي مستطيلات

يقع فى مركزه الهندسى

(٦) مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة منتظمة الكثافة

يقع عند نقطة منتصف محورها

(٧) مركز ثقل اسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة

يقع عند نقطة منتصف محورها

(٨) مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف المحور

الموازي لأحرفه الجانبية و المار بمركز ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتي الكثافة

**إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١١٧**

صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل قرص دائرى مركزه

نقطة الأصل و طول نصف قطره ٦ وحدات طول ، قُطع منه قرصان

دائريان مركز أحدهما ( ١ - ، ٣ - ) ، و طول نصف قطره وحدة

طول واحدة ، و مركز الآخر ( ٢ ، ١ ) ، و طول نصف قطره

٣ وحدات طول ، أوجد مركز ثقل الجزء الباقي من القرص

**الحل**

∴ الكتل تتناسب مع المساحات

، ∴ مساحة القرص ٣ : مساحة القرص ٢ : مساحة القرص ١

$$= 36\pi : 9\pi : \pi = 4 : 1 : 1$$

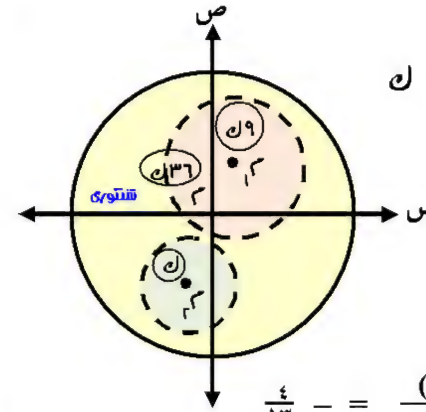
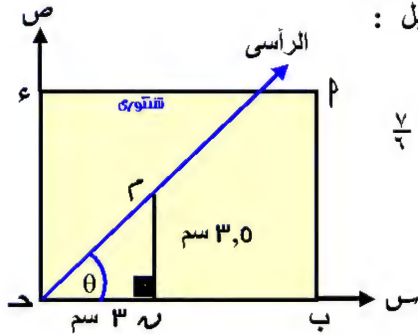
، كتلة المربع =  $٩$  ، و تؤثر عند  $م$  ( ٦ ، ٢ )  
، نختار اتجاهين متعامدين  $\overrightarrow{حس}$  ،  $\overrightarrow{حص}$  ،  
كما بالشكل وذلك باعتبار نقطة  $ح$  نقطة الأصل  
يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣	٩	٩
س	٤	٦	١
ص	٣	٢	٣

$$\therefore س_م = \frac{٦ \times ٩ - ٤ \times ٩}{٩ - ٩} = ٣$$

$$ص_م = \frac{٢ \times ٩ - ٣ \times ٩}{٩ - ٩} = \frac{٧}{٢}$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو : (  $\frac{٧}{٢}$  ، ٣ ) بالنسبة لنقطة  $ح$   
عند التعليق من نقطة  $ح$  كما بالشكل المقابل :  
يكون :  $\theta = ٣ \div \frac{٧}{٢} = \frac{٦}{٧}$   
∴ ظل زاوية ميل  $\overrightarrow{حب}$  على الرأسى =  $\frac{٦}{٧}$



∴ نفرض أن : كتلة القرص  $م = ٣٦$   
، كتلة القرص  $م = ٩$  ، كتلة القرص  $م = ٢٧$   
و باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overrightarrow{حس}$  ،  $\overrightarrow{حص}$  ،  
يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٩	٩	٣٦
س	١	١	٠
ص	٣	٢	٠

$$\therefore س_م = \frac{(١ -) \times ٩ - ١ \times ٩ - ٠ \times ٣٦}{٩ - ٩ - ٣٦} = -\frac{٤}{١٣}$$

$$ص_م = \frac{(٣ -) \times ٩ - ٢ \times ٩ - ٠ \times ٣٦}{٩ - ٩ - ٣٦} = -\frac{١٥}{٣٦}$$

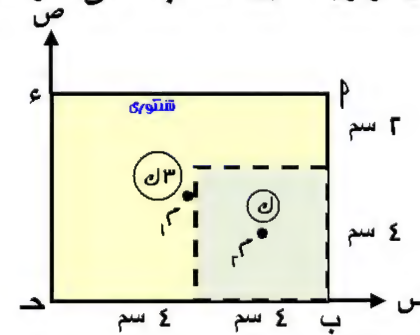
∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو : (  $-\frac{٤}{١٣}$  ،  $-\frac{١٥}{٣٦}$  ) بالنسبة لنقطة الأصل  $م$

### إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١٨

صفحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل  $٨$  ب د ع الذى فيه :  
 $٨$  ب =  $٦$  سم ، ب د =  $٨$  سم ، قُطعت منها قطعة مربعة الشكل من  
الرأس ب طول ضلعها  $٤$  سم ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن  
كل من  $\overrightarrow{حد}$  ،  $\overrightarrow{حب}$  ، ثم إذا علق الجزء الباقي تعليقا حراً من  
الرأس  $ح$  فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل  $\overrightarrow{حب}$  على الرأسى

#### الحل

∴ الكتل تتناسب مع المساحات  
، ∴ مساحة المستطيل : مساحة المربع  
 $١٦ : ٤٨ = ٣ : ١$   
∴ نفرض أن : كتلة المستطيل =  $٣$   
و تؤثر عند  $م$  ( ٤ ، ٣ )





## حل تمارين ( ٦ - ٢ ) صفحة ١١٩ بالكتاب المدرسى

أولاً : أكمل ما يلى :

(١) تُسمى النقطة الثابتة فى الجسم التى يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض ب ....

**الحل**

تُسمى النقطة الثابتة فى الجسم التى يمر بها خط عمل محصلة أوزان الجسيمات التى يتكون منها الجسم مهما تغير وضعه بالنسبة للأرض بمركز الثقل

(٢) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم المار ب ....

**الحل**

يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقاً حراً على الخط المستقيم المار بنقطة التعليق

(٣) مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند ....

**الحل**

مركز ثقل قضيب رفيع منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه

(٤) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند ....

**الحل**

مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بشكل متوازى أضلاع يقع عند مركزه الهندسى ( نقطة تلاقى قطريه )

(٥) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى ....

**الحل**

مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المحدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث

(٦) إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على ....

**الحل**

إذا وُجد محور تماثل هندسى لصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن مركز ثقلها يقع على خط هذا المحور

(٧) إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة ، وقع مركز ثقله فى ....

**الحل**

إذا وُجد مستوى تماثل هندسى لمجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى

(٨) مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى ....

**الحل**

مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع فى مركز الدائرة

(٩) مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى ....

**الحل**

مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع فى مركز الكرة

(١٠) مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى ....

**الحل**

مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازى مستطيلات يقع فى مركزه الهندسى

(١١) مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة

**الحل**

مركز ثقل قشرة اسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف محورها

ثانياً : اجب عن الأسئلة الآتية :

(١٢) وُضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس م ، ب ، ح ، د ، لمربع طول

ضلع المربع ٨. سم ثم أُضيفت كتلة خامسة مساوية لها عند مركزه

عين مركز ثقل المجموعة ، وإذا رُفعت الكتلة الموجودة عند م

عين مركز ثقل المجموعة باستخدام الكتلة السالبة

**الحل**

∴ الكتلة متساوية عند رؤوس المربع متساوية

∴ مركز ثقل هذه الكتل يقع عند مركز المربع

" نقطة تلاقي القطرين هـ ( ٤.٠ ، ٤.٠ )

، وبفرض أن كل كتلة = ٤

∴ كتلة المربع = ٤ ٤

∴ الكتلة عند هـ مساوية للكتل عند الرؤوس أى = ٤

∴ كتلة المجموعة = ٥ ٤ ، مركز ثقل المجموعة يقع عند هـ ( ٤.٠ ، ٤.٠ )

**حل آخر**

باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص كما

بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة الأصل

وبفرض أن كل كتلة = ٤

يكون جدول الكتل

و الاحداثيات

كما يلى :

م	ب	ح	د	هـ
٤	٤	٤	٤	٤
٤	٨	٨	٨	٤
٤	٨	٨	٨	٤

$$\therefore \text{سم م} = \frac{٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٤ \times ٤}{٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤} = ٤$$

$$\text{سم ص} = \frac{٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٤ \times ٤}{٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤} = ٤$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : ( ٤.٠ ، ٤.٠ ) بالنسبة لنقطة م أى عند مركز المربع

عند رفع الكتلة الموجودة عند م : " باستخدام الكتلة السالبة "

باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص كما

بالشكل المقابل و ذلك باعتبار

نقطة م نقطة الأصل ، و

بفرض أن كل كتلة = ٤

يكون جدول الكتل

والاحداثيات كما يلى :

م	ب	ح	د	هـ
٤	٤	٤	٤	٤
٤	٨	٨	٨	٤
٤	٨	٨	٨	٤

$$\therefore \text{سم م} = \frac{٤ \times ٤ - ٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ - ٨ \times ٤}{٤ - ٤ + ٨ - ٨} = ٤$$

$$\text{سم ص} = \frac{٤ \times ٤ - ٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ - ٨ \times ٤}{٤ - ٤ + ٨ - ٨} = ٤$$

∴ مركز ثقل المجموعة المتبقية هو : ( ٤.٠ ، ٤.٠ ) بالنسبة لنقطة م

**حل آخر**

باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص كما

بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة الأصل

وبفرض أن كل كتلة = ٤

يكون جدول الكتل

و الاحداثيات

كما يلى :

م	ب	ح	د	هـ
٤	٤	٤	٤	٤
٤	٨	٨	٨	٤
٤	٨	٨	٨	٤

$$\therefore \text{سم م} = \frac{٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٤ \times ٤}{٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤} = ٤$$

$$\text{سم ص} = \frac{٤ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٨ \times ٤ + ٤ \times ٤}{٤ + ٤ + ٤ + ٤ + ٤} = ٤$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : ( ٤.٠ ، ٤.٠ ) بالنسبة لنقطة م



$$٢٢ = ٢٢ \frac{٢}{٣} = ١٤ \frac{٢}{٣} = ١٤ \frac{٢}{٣} \text{ سم}$$

$$١٤ \frac{٢}{٣} = ١٤ \frac{٢}{٣} \text{ سم ، } \therefore \text{ الكتل تتناسب مع المساحات}$$

$$\therefore \text{ مساحة المثلث م ب د : مساحة المثلث م ب د}$$

$$١ : ٣ = \sqrt{٣} \times ١٢ \times \frac{١}{٢} : \sqrt{٣} \times ٦ \times \frac{١}{٢} =$$

$$\therefore \text{ نفرض أن : كتلة المثلث م ب د = ٣ ن ، كتلة المثلث م ب د = ن}$$

و نكون جدول الكتل واحداثياتها كما يلى :

$$١ = \frac{١ \times ١ - ١ \times ٣}{١ - ٣} = ١ \text{ سم}$$

الكتلة	٣ ن	ن	ن
س	١	١	١
ص	٣	١	١

$$\sqrt{٣} \frac{١}{٣} = \frac{\sqrt{٣} \times ١ - \sqrt{٣} \times ٣}{١ - ٣} = ١ \text{ ص ،}$$

$\therefore$  مركز ثقل الجزء الباقي هو  $(١, \frac{١}{٣})$  بالنسبة لنقطة د

(١٠) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين م ب د

فيه : م ب = م د ، م ب هو ارتفاع المثلث و طوله ٤٥ سم

رُسم مستقيم مواز للقاعدة م د و يمر بمركز ثقل الصفيحة

فقط م ب ، م د فى النقطتين ه ، و على الترتيب ، اثبت أن

مركز ثقل الشكل الرباعي ه ب د و يقع على م ب و يبعد ٧ سم

عن نقطة ع

الحل

نختار اتجاهين متعامدين د س ، د ص

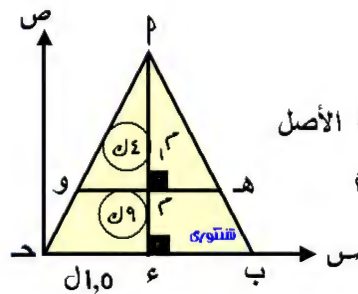
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل

$$\text{من هندسة الشكل : } ٢٢ = ٢٢ \frac{٢}{٣} = ١٤ \frac{٢}{٣} = ١٤ \frac{٢}{٣} \text{ سم}$$

$$\Delta م ب د \sim \Delta م د ه ، \text{ و يكون :}$$

$$\text{ب د : ه د} = ٢ : ٣$$

$$\therefore \text{ نفرض أن : ب د = ٣ ن ، ه د = ٢ ن}$$



(١٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل قرص دائرى طول نصف قطره

٣ سم أقتطع منه جزء على شكل قرص دائرى طول نصف قطره

١ سم و يبعد عن مركز الصفيحة ٢ سم أوجد مركز ثقل الجزء

المتبقى

الحل

$\therefore$  الكتل تتناسب مع المساحات

$$\therefore \text{ مساحة القرص م : مساحة القرص م}$$

$$١ : ٩ = \pi ١٠٠ : \pi ٩٠٠ =$$

$$\therefore \text{ نفرض أن : كتلة القرص م = ٣٦ ن}$$

$$\text{كتلة القرص م} = ٩ ن ، \text{ كتلة القرص م} = ن$$

و باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص

باعتبار أن م نقطة الأصل فيكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

$$٢,٥ = \frac{٢٠ \times ١ - ٠ \times ٩}{١ - ٩} = ٢,٥ \text{ سم}$$

الكتلة	٩ ن	ن	ن
س	٠	٢٠	٠
ص	٠	٠	٠

$$\text{ص م} = \text{صفر}$$

$\therefore$  مركز ثقل الجزء الباقي هو :  $(٠, ٢,٥)$  بالنسبة لنقطة الأصل م

(١٣) م ب د مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ، م مركز ثقله

أقتطع منه المثلث م ب د عين مركز ثقل الجزء المتبقى

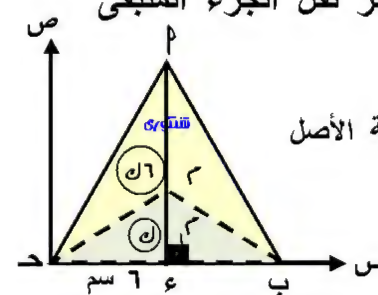
الحل

نختار اتجاهين متعامدين د س ، د ص

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل

$$\text{من هندسة الشكل : ب د = ٦ سم}$$

$$\epsilon م = ١٢ \text{ ح } ٦٠ = \sqrt{٣} \times ٦ \text{ سم}$$





عند م	عند ب	عند د	عند ع	عند هـ	عند و
الكتلة	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠
س	١٠	٢٠	١٠	٢٠	١٠
ص	٣٦١٠	٠	٣٦١٠	٠	٣٦١٠

$$س_م = \frac{١٠ \times ١ - ٢٠ \times ٢ - ١٠ \times ٢ - ١٠ \times ٢ + ٢٠ \times ٢ + ١٠ \times ٢}{١ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢} = ٠$$

$$ص_م = \frac{٣٦١٠ \times ١ - ٠ \times ٣٦١٠ - ٣٦١٠ \times ٢ - ٣٦١٠ \times ٢ - ٣٦١٠ \times ٢}{١ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢ + ٢} = ٣٦٢$$

∴ مركز الثقل هو ( ٣٦٢ ، ٠ ) بالنسبة لنقطة ي ، ∴ ي ( ٠ ، ٠ )

∴ مركز ثقل السلك يبعد ٣٦٢ عن مركز المسدس عند التعليق من م

و يكون  $\vec{MP}$  هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق م

$$\frac{٣٦٢}{٠} = \frac{٣٦١٢}{١} = ( ٢٦٠ \angle )$$

∴  $\angle ( ٢٦٠ \angle ) = ١٨' ٦٤^\circ$  ، ∴ قياس زاوية رأس المسدس =  $١٢٠^\circ$

∴  $\angle ( \theta \angle ) = ١٨' ٦٤^\circ - ١٢٠^\circ = ٤٢' ٥٥^\circ$

**حل آخر " لايجاد مركز الثقل "**

∴ المسدس منتظم ∴ أطوال أضلاعه متساوية و تتناسب مع كتلتها

∴ طول السلك = ١٠ سم ∴ طول كل ضلع =  $٠ \div ١٠ = ٢٠$  سم

∴ طول الضلع السادس ( ع پ ) = ٢٠ سم ،

مجموع أطوال أضلاع المسدس = ١٢٠ سم

∴ طول ( ع پ ) : مجموع أطوال أضلاع المسدس

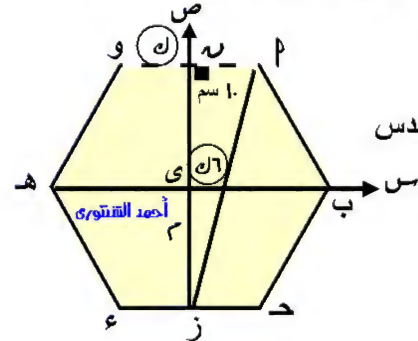
$$٦ : ١ = ١٢٠ : ٢٠ =$$

، بفرض أن : كتلة أضلاع المسدس = ٦ ن

، ويؤثر عند نقطة ي

، كتلة طول ( ع پ ) = ٦ ن

، و يؤثر عند نقطة تبعد نقطة ن



∴ مساحة المثلث م ب د : مساحة المثلث م هـ و

$$= \frac{١}{٢} \times ٢٥ \times ١٣ : \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٣٠ = ٩ : ٤$$

∴ نفرض أن : كتلة المثلث م ب د = ٩ ن ، كتلة المثلث م هـ و = ٤ ن

حيث :  $٤ م = ١٥ = ١٢ \times \frac{١}{٢} + ٢ م = ٢ م$  ،  $١٥ = ٢ م + ٢ م = ٢ م$  سم

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٩ ن	٤ ن
س	١,٥	١,٥
ص	١٥	٢٥

$$س_م = \frac{١,٥ \times ١٤ - ١,٥ \times ٩}{١٤ - ٩} = ١,٥$$

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب د و يقع على  $\vec{MP}$

$$ص_م = \frac{٢٥ \times ١٤ - ١٥ \times ٩}{١٤ - ٩} = ٧$$

∴ مركز ثقل الشكل الرباعى هـ ب د و يبعد عن نقطة مسافة : ٧ سم

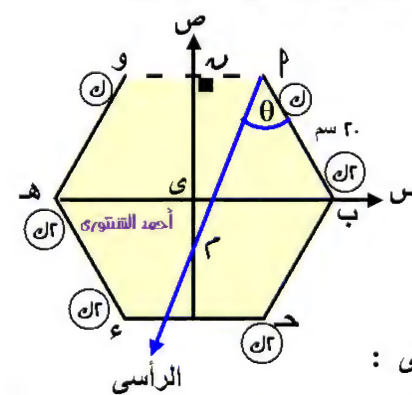
(١٦) سلك منتظم طوله ١٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس

منتظم م ب د هـ و بدأ من نقطة م ، عين بعد مركز ثقله عن

مركز المسدس ، و إذا علق السلك تعليقا حراً من طرفه م

عين قياس زاوية ميل م ب على الرأسى فى وضع التوازن

**الحل**



طول كل ضلع =  $٠ \div ١٠ = ٢٠$  سم

بأخذ الاتجاهين المتعامدين ي س ، ي ص

حيث ي " مركز المسدس " نقطة الأصل

و بفرض أن كل كتلة عند كل ضلع =

٢ ن و تؤثر فى منتصف كل منها

و توزع عند كل رأس

فتكون الكتل كما بالشكل المقابل

، و تكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

حيث :  $y = z = \frac{1}{6} \times 20 = 3.33$  سم  
فتكون الكتل واحداً كما بالجدول التالى :

الكتلة	٨ ك	٨ ك	٨ ك
س	٣٠	٣٠	٣٠
ص	١٥	١٥	٢٥

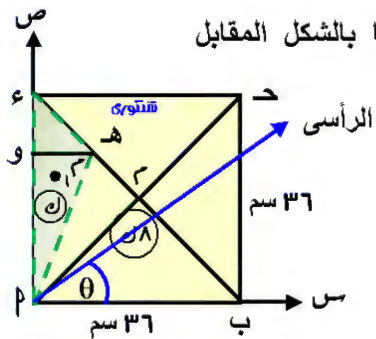
∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو  $(\frac{1}{6} \times 20, \frac{1}{6} \times 20)$  بالنسبة لنقطة ب

عند التعليق من نقطة ب فإن :  $\theta = \frac{1}{6} \times 20 \div \frac{1}{6} \times 20 = 0$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها  $\overline{ب-د}$  مع الرأسى = ٠  
لاحظ أن : الرأسى ينطبق على القطر  $\overline{ب-ع}$

(١٨) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع  $\overline{ب-د-ع-ه}$  طول ضلعه ٣٦ سم ، تقاطع قطراه فى م و نصفت  $\overline{م-ع}$  فى نقطة ه ، و فصل منها المثلث  $\overline{ه-د-ع}$  ، عين مركز ثقل الجزء الباقى من الصفيحة ، و إذا علقت الصفيحة تعليقاً خالصاً من نقطة م حتى اتزنت فى مستوى رأسى فأوجد ميل  $\overline{م-ب}$  على الرأسى

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overline{م-س}$  ،  $\overline{م-ص}$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة الأصل

من هندسة الشكل :  $\triangle BDE \sim \triangle HDE$  و هـ

$$\therefore \frac{هـ}{ب} = \frac{د}{هـ} = \frac{ع}{د} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{هـ}{ب} = \frac{د}{هـ} = \frac{ع}{د} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{هـ}{ب} = \frac{د}{هـ} = \frac{ع}{د} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{هـ}{ب} = \frac{د}{هـ} = \frac{ع}{د} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{هـ}{ب} = \frac{د}{هـ} = \frac{ع}{د} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

حيث :  $y = z = \frac{1}{6} \times 20 = 3.33$  سم  
فتكون الكتل واحداً كما بالجدول التالى :

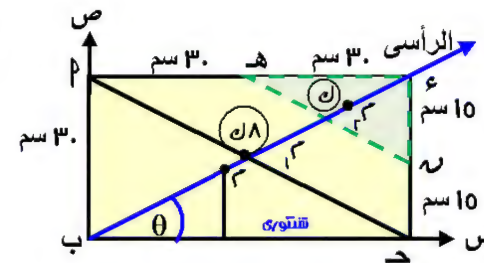
الكتلة	٦ ك	٦ ك	٦ ك
س	٠	٠	٠
ص	٠	٠	٣٦

∴ مركز الثقل = (٠ ، ٣٦) بالنسبة لنقطة ب

(١٧) صفيحة رقيقة محدودة بالمستطيل  $\overline{ب-د-ع-ه}$  حيث :  $ب = ٣٠$  سم ،

$د = ٦٠$  سم ، هـ منتصف  $\overline{م-ع}$  ، ر منتصف  $\overline{ع-د}$  ، فإذا فصل المثلث  $\overline{هـ-د-ع}$  من الصفيحة و علق الجزء الباقى تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها  $\overline{ب-د}$  مع الرأسى

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overline{ب-س}$  ،  $\overline{ب-ص}$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
∴ مساحة المستطيل  $\overline{ب-د-ع-ه} = ١٨٠٠$  سم<sup>٢</sup> ،  
مساحة المثلث  $\overline{هـ-د-ع} = \frac{١}{٢} \times ٣٠ \times ٦٠ = ٩٠٠$  سم<sup>٢</sup>

$$\therefore \text{مساحة المستطيل} : \text{مساحة المثلث} = ١ : ٨$$

∴ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل  
بفرض أن كتلة المستطيل = ٨ ك ∴ كتلة المثلث = ١ ك

حيث : كتلة المستطيل تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه م (٣٠ ، ١٥)

، كتلة المثلث تؤثر عند تلاقى متوسطاته م (٢٥ ، ٥٠)

حيث : هـ (٣٠ ، ٣٠) ، ع (٣٠ ، ٦٠) ، ر (١٥ ، ٦٠)



∴ هـ ( ٩ ، ٢٧ ) ، ∴ ع ( . ، ٣٦ ) ، ∴ پ ( . ، . )

$$(21, 3) = ((27 + 36 + \dots) \times \frac{1}{4}) + ((9 + \dots + \dots) \times \frac{1}{4}) = 15 \therefore$$

و هي نقطة تلاقي متوسطات  $\triangle$  و هـ

، ∴ الكتل تتناسب مع المساحات

، مساحة المربع  $ABCD$  : مساحة  $\triangle OHE$

$$1 : \Lambda = 9 \times 37 \times \frac{1}{2} : 37 \times 37 =$$

∴ نفرض أن : كتلة المربع  $ABCD = 8$  ك ، و تؤثر عند  $M(8, 8)$

، كتلة  $\Delta$  وهاء =  $l$  ، و تؤثر عند  $m$  ( ٣ ، ٢١ )

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالي :

$$\begin{aligned}
 \text{٢. } \frac{1}{V} &= \frac{3 \times ٨ - 36 \times ٨}{٨ - ٨} = \therefore \text{س م} \\
 \text{٤. } \frac{4}{V} &= \frac{٢١ \times ٨ - ١٨ \times ٨}{٨ - ١٨} = \text{، ص م}
 \end{aligned}$$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو  $(\frac{1}{5} \cdot 2, \frac{4}{5} \cdot 14)$  بالنسبة لنقطة P

عند التعليق من نقطة p فإن :  $\frac{4}{\sqrt{v}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} \div 1\sqrt{\frac{4}{v}} = \theta$  طا

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها  $\overrightarrow{MP}$  مع الرأسى  $= \frac{4}{5}$

(19) صفیحة منتظمة على شكل مربع  $\mathcal{P}$  ب  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{E}$  طول ضلعه  $\mathcal{A}$  سم ،

**فصل منها قرص دائری طول نصف قطره ۲ سم و یبعد مرکزہ**

٣ سم عن كل من  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  ، عين مركز ثقل الجزء الباقي

عن كل من ع ح ، ع

الحمد لله

باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{e}_s$  ،  $\vec{e}_v$  كما بالشكل التالي

وذلك باعتبار نقطة ء نقطة الأصل

، ∴ الكتلة تتناسب مع المساحات

∴ مساحة المربع : مساحة القرص

$$\pi : \mathbb{R} = \pi \mathbb{Z} : \Lambda \times \Lambda =$$

∴ نفرض أن : كتلة المربع = 16 ج

و تؤثر عند  $m(2, 2)$  ،

كتلة القرص  $\pi$  ، و تؤثر عند  $(0, 0)$

حيث : م. يبعد ٣ سم عن كل من  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$

أى : يبعد ٥ سم عن كل من  $\overline{e}$  ،  $\overline{e'}$

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالي :

$$3,71 = \frac{0 \times 1\pi - 1 \times 1\pi}{1\pi - 1\pi} = \therefore \text{مسألة}$$

$$3,71 = \frac{0 \times 2\pi - 2 \times 17}{2\pi - 17} = \text{صم}$$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو (3,71 ، 3,71) بالنسبة لنقطة ع

أى أن : مركز ثقل الجزء المتبقى يبعد ٣,٧٦ سم عن كل من  $\overline{p}$  ،  $\overline{e}$

(٢٠) صفحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع  $\mu$  بـ  $d$   $\epsilon$  الذي طول ضلعه

٤. سم ، ثقبث ثقباً دائرياً مساحته ٤ سم<sup>٢</sup> ، و مركزه عند نقطة

عند نقطة على القطر بـ  $\bar{e}$  و تقسمه من الداخل بنسبة ١ : ٤

من ناحية ب ، ثم علقت تعليقاً حراً من الرأس م ، عين قياس

زاوية ميل الضلع  $\overline{AB}$  على الرأسى فى وضع الاتزان



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{p}_s$  ،  $\vec{p}_v$

كما بالشكل التالي و ذلك باعتبار نقطة  $\mu$  نقطة الأصل

∴ الكتل تتناسب مع المساحات



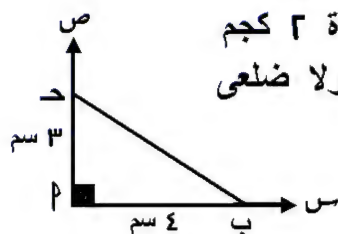
حل تمارين عامة صفحة ٢١ بالكتاب المدرسي

أولاً : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(1) مركز ثقل ثلاث كتل متساوية قيمة كل واحدة ٢ كجم

موضوعة عند رؤوس مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعاً

القائمة ٣ سم ، ٤ سم هو ....


$$\left(\frac{2}{3}, 7\right) \text{ (ب)} \qquad \left(\frac{4}{3}, 1\right) \text{ (پ)}$$
$$(7, \frac{2}{3}) \quad (6) \qquad (1, \frac{4}{3}) \quad (7)$$

**∴ الكتل متساوية عند رؤوس المثلث**

∴ مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث

، ( . ، . ) پ ، ( . ، ٢ ) ح ، ( ٣ ، . )

$$(1 + \frac{1}{2}) = ((1 + 1 + 1) \times \frac{1}{2}) \quad , \quad (1 + 1 + 1) \times \frac{1}{2} = 1.5 \therefore$$

(٢) مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة

المستقيمة الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة ....

(٥) طردية      (ب) عكسية      (د) عشوائية      (٤) ثابتة

\_\_\_\_\_

مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة

الواصلة بينهما و يقسم طولها بنسبة عكسية

(٣) مركز ثقل النظام التالي :  $L_1 = ١$  كجم عند  $(٣, ٢)$  ،  $L_2 = ٢$  كجم

عند (۱،۲) ،  $L_2 = 3$  كجم عند (۱،۰) هو ....

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{5}{5}\right) \text{ (ج)} \qquad \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right) \text{ (د)}$$
$$(1, \cdot) \quad (6) \qquad \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} -\right) \quad (7)$$

FV

∴ مساحة المربع : مساحة الثقب =  $2. \times 2. = 4. : 1.$

 $1:17 =$ 

∴ نفرض أن : كتلة المربع = 16 ك

و تؤثر عند  $m(20, 20)$  ،

كتلة القرص =  $L$  ، و تؤثر عند  $M (32, 8)$  .

حيث : م : ب :: م : ع = ٤ : ١

$$\therefore 2 : 1 = 6 : 3$$
$$0 : 1 = \beta : \beta \sim \therefore \quad , \quad \Delta \sim \beta \Delta \therefore$$
$$\therefore \text{سم } \Lambda = \Sigma. \times \frac{1}{6} = \text{ب } \frac{1}{6} = \text{ب } \text{سم} \therefore$$
$$\text{سم } \Lambda = \Sigma. \times \frac{1}{6} = 49 \frac{1}{6} = 2,2$$

فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالي :

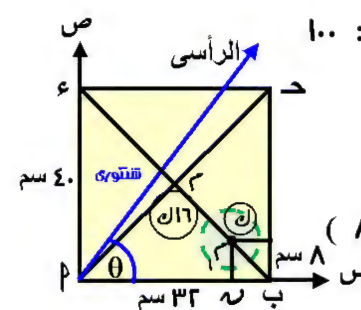
$$19\frac{1}{5} = \frac{32 \times 1 - 2. \times 17}{1 - 17} = \therefore \text{س.م}$$

$$r. \frac{4}{5} = \frac{1 \times 17 - 2 \times 17}{17 - 17} = \text{صم}$$

∴ مركز ثقل الجزء المتبقى هو  $(19\frac{1}{5}, 20\frac{4}{5})$  بالنسبة لنقطة P

عند التعليق من نقطة p فإن :  $\frac{13}{16} = 19\frac{1}{6} \div 2.\frac{4}{6} = \theta$  طا

أى أن : قياس الزاوية التي يصنعها  $\overline{Pb}$  مع الرأسى  $IV' \perp IV$



الكتلة	١٦ ك	- ك
س	٢٠	٣٢
ص	٢٠	٨

الحل

$$\frac{1}{3} = \frac{0 \times 3 + (2-1) \times 2 + 2 \times 1}{3 + 2 + 1} = \text{سم}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 2 + 3 \times 1}{3 + 2 + 1} = \text{سم}$$

∴ موضع مركز الثقل هو  $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

- (٤) مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٦ ث كجم ، ٩ ث كجم بينهما مسافة ١٠ أمتار ، يبعد عن الكتلة الأولى مسافة ....
- (ب) ٣ متر (د) ٥ متر (ج) ٦ متر (هـ) ٦ متر

الحل

باعتبار أن الخط الواصل بين الكتلتين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الكتلة ٦ نيوتن فيكون :  $\text{سم} = 0$  ،  $\text{سم} = 10$  ،  $\text{نيوتن} = 6$  ،  $\text{نيوتن} = 9$

$$\therefore \text{سم} = \frac{10 \times 9 + 0 \times 6}{9 + 6} = 6$$

- أى أن : مركز ثقل الكتلتين الماديين يقع على مسافة ٦ متر من الكتلة الأولى
- (٥) بُعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوى ....

(ب)  $3\sqrt{3}$  سم (د) ٦ سم

(ج) ٦ سم (هـ)  $3\sqrt{3}$  سم

الحل

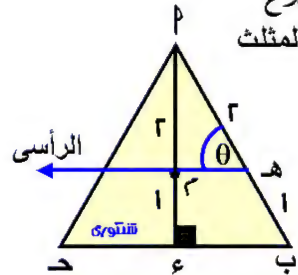
∴ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ∴ مركز ثقل الصفيحة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث

- ، باعتبار أحد الرؤوس نقطة الأصل  $(0, 0)$  ، يكون الرأس الثانى  $(0, 12)$  ، الرأس الثالث  $(6, 6)$  (١٢ حـ ٦) ،  $(6, 6) = (3\sqrt{3}, 6)$  ، ∴  $(6, 6) = ((3\sqrt{3} + 0 + 0) \times \frac{1}{3}, (6 + 12 + 0) \times \frac{1}{3}) = 2$  ∴ مركز ثقل الصفيحة يبعد عن أحد رؤوس المثلث  $2\sqrt{3}$  سم

- (٦) إذا علقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرافها تقسمه بنسبة ١ : ٢ فإن قياس زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى يساوى ....
- (ب)  $30^\circ$  (د)  $40^\circ$  (ج)  $22,5^\circ$  (هـ)  $60^\circ$

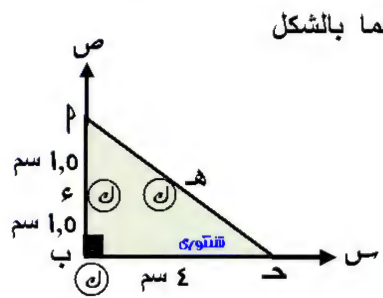
الحل

- ∴ الصفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ∴ مركز ثقل الصفيحة يؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث أى عند نقطة م كما بالشكل المقابل
- حيث :  $2 : 1 = 2 : 1$  ، عند التعليق من نقطة هـ  $\Rightarrow \overline{PM}$  ، حيث :  $2 : 1 = 2 : 1$  ، فإن : الرأسى يمر بنقطتى هـ ، م ∴ الرأسى //  $\overline{BD}$  ∴  $\theta = \angle (B \cap) = 60^\circ$  ، أى أن : قياس زاوية ميل حرف الصفيحة المعلق منها  $60^\circ$



- (٧) فى الشكل المقابل :

- ٦ ب د ٤ سلك منتظم طوله ٣٢ سم فيه :  $٦ ب = ٢ ب د = ٢ د = ٤ ب = ١٦$  سم
- فإن : بُعد مركز ثقل السلك عن كل من ، على الترتيب هو ....



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{s}$  ، كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل من هندسة الشكل : ب ( ٠ ، ٠ ) ،  
 ع ( ١,٥ ، ٠ ) ، هـ ( ١,٥ ، ٢ )  
 فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

	عند ب	عند ع	عند هـ
الكتلة	١	١	١
س	٠	٠	٢
ص	٠	١,٥	١,٥

$$\therefore \text{س م} = \frac{٢ \times ١ + ٠ \times ١ + ٠ \times ١}{١ + ١ + ١} = \frac{٢}{٣}$$

$$\text{ص م} = \frac{١,٥ \times ١ + ١,٥ \times ١ + ٠ \times ١}{١ + ١ + ١} = ١$$

$\therefore$  مركز ثقل الكتل الثلاث هو  $( ١ , \frac{٢}{٣} )$  بالنسبة لنقطة ب

**حل آخر**

$\therefore$  الكتل متساوية

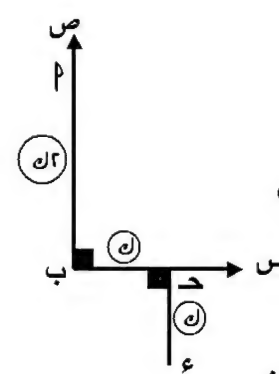
$\therefore$  مركز ثقلها يقع عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث ب ع هـ ، و لتكن م حيث :

$$٢ = ( ١,٥ + ١,٥ + ٠ ) \times \frac{١}{٣} , ( ٢ + ٠ + ٠ ) \times \frac{١}{٣} = ٢$$

$$( ١ , \frac{٢}{٣} ) =$$

(٩) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث م ب د القائم الزاوية فى ب فيه : م ب = ب د = ٩ سم ، إذا فصل المثلث م ب م حيث م مركز ثقل الصفيحة و علق الجزء الباقي تعليقاً حراً من النقطة ب فأوجد ظل زاوية ميل  $\vec{b}$  د على الرأسى فى وضع التوازن

**الحل**



(ب) ( ٤ ، ٤ )  
 (د) ( ٥ ، ٣ )  
 (٤) ( ٨ ، ٤ )

**الحل**

باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{s}$  ، كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل  
 $\therefore$  م ب = ٢ ب د = ٢ د ع = ١٦ سم  
 $\therefore$  م ب = ١٦ سم ، ب د = ٨ سم ، د ع = ٨ سم  
 $\therefore$  السلك منتظم  $\therefore$  يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان  
 $\vec{b}$  ،  $\vec{b}$  د ،  $\vec{b}$  ع ،  $\therefore$  الأطوال تتناسب مع الكتل  
 $\therefore$  م ب : ب د : د ع = ١ : ٢ : ٢  
 $\therefore$  بفرض أن كتل القضبان بالترتيب هى : ٢ ، ١ ، ١  
 و تؤثر فى منتصف كل منها  
 فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالى :

	٢	١	١
الكتلة	٢	١	١
س	٠	٤	٨
ص	٨	٠	٤

$$\therefore \text{س م} = \frac{٨ \times ١ + ٤ \times ١ + ٠ \times ٢}{٢ + ١ + ١} = ٣$$

$$\text{ص م} = \frac{( ٤ - ) \times ١ + ٠ \times ١ + ٨ \times ٢}{٢ + ١ + ١} = ٣$$

$\therefore$  مركز ثقل السلك هو ( ٣ ، ٣ ) بالنسبة لنقطة ب

ثانياً أجب عن الأسئلة الآتية :

(٨) م ب د مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : م ب = ٣ سم ، ب د = ٤ سم ، وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها ١ عند ب ، نقطة منتصف م ب ، نقطة منتصف م د أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث

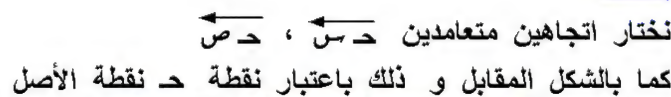
**الحل**





$$= \frac{5}{14} \text{ سم}$$

أى أن : مركز ثقل القضيب يبعد عن ب مسافة :  $\frac{5}{13}$  سم



هـ	ء	ح	ب	پ	
۱۰	۲	۳	۴	۶	الوزن
۴	۰	۰	۴	۴	س
۲	۴	۰	۰	۴	ص

3.

أى أن : ظل زاوية ميل  $\overline{ب ح}$  على الرأسى  $\frac{5}{8}$

$$V_0 = V(1) + V\left(\frac{2}{3}\right) = V(3) \therefore$$

$\therefore$  بُعد مركز الثقل عن نقطة ب =  $\frac{1}{3} \times 13$  سم

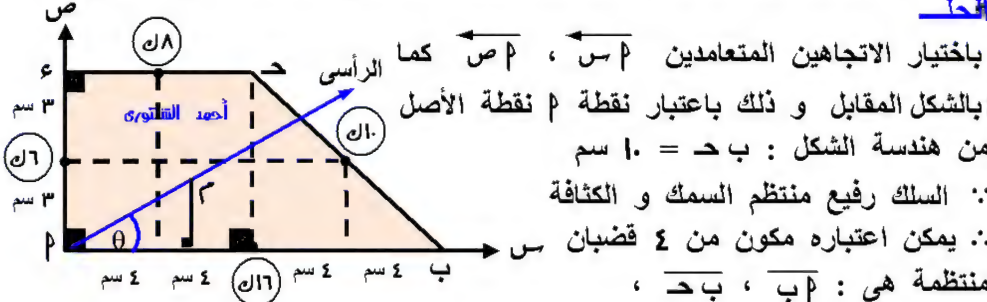
(١٣) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة طوله ٤ سم ثنى على شكل شبه

منحرف فيه ب = ١٦ سم ، د = ٨ سم ، ع = ٦ سم ، ٦ = ٦ سم ،

$\angle (ب د ع) = 90^\circ$  ، أوجد بعد مركز ثقل

السلك عن الضلعين د ع ، د ب ، و إذا علق السلك تعليقاً حراً من

ب فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها د ب مع الرأسى فى وضع التوازن



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{m}$  ،  $\vec{s}$  كما بالشكل

المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

من هندسة الشكل : ب د = ١٠ سم

$\therefore$  السلك رفيع منتظم السمك و الكثافة

$\therefore$  يمكن اعتباره مكون من ٤ قضبان

منتظمة هى : د ب ، د ع ،

د ع ، د ب : حيث ب = ١٦ سم ، د = ٨ سم ، ع = ٦ سم

، ع = ٦ سم ،  $\therefore$  الكتل تتناسب مع الأطوال

بفرض أن : كتل هذه القضبان هى : ١٦ ك ، ٨ ك ، ٦ ك ، ٦ ك على الترتيب

و كل منها تؤثر عند منتصفه حيث احداثيات نقط المنتصفات هى على الترتيب :

و يكون جدول

الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	١٦ ك	٨ ك	٦ ك	٦ ك
س	٨	١٢	٤	٠
ص	٠	٣	٦	٣

$$V = \frac{0 \times 16 + 4 \times 8 + 12 \times 10 + 8 \times 16}{40} = 3 \text{ سم}$$

$$2,8 = \frac{3 \times 16 + 6 \times 8 + 3 \times 10 + 0 \times 16}{40} = \text{ص}$$

$$3,2 = \frac{2 \times 10 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 4 \times 4 + 4 \times 6}{10 + 2 + 3 + 4 + 6} = \text{س}$$

$$2,8 = \frac{2 \times 10 + 4 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 4 + 4 \times 6}{10 + 2 + 3 + 4 + 6} = \text{ص}$$

$\therefore$  مركز ثقل الجزء المتبقى هو ( ٢,٨ ، ٣,٢ ) بالنسبة لنقطة د

أى يبعد عن كل د ب ، د ع مسافة : ٣,٢ سم ، ٢,٨ سم على الترتيب

(١٢) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة ثنى على شكل مثلث ب د قائم

الزاوية فى ب فيه : ب = ٣ سم ، د = ٤ سم ، أوجد بعد

مركز ثقل السلك عن كل من ب د ، د ع ثم أوجد بعده عن ب

الحل

باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{s}$  كما بالشكل

المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

من هندسة الشكل : د ب = ٥ سم

$\therefore$  السلك منتظم  $\therefore$  يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان

د ب ، د ع ، د ب

$\therefore$  الأطوال تتناسب مع الكتل

د ب : د ع : د ب = ٣ : ٤ : ٥

$\therefore$  بفرض أن كتل القضبان بالترتيب هى : ٥ ك ، ٤ ك ، ٣ ك

و تؤثر فى منتصف كل منها

فتكون الكتل واحداثياتها كما بالجدول التالى :

الكتلة	٥ ك	٤ ك	٣ ك
س	٢	٢	٠
ص	١,٥	٠	١,٥

$$\frac{3}{5} = \frac{2 \times 5 + 2 \times 4 + 0 \times 3}{5 + 4 + 3} = \text{س}$$

$$1 = \frac{1,5 \times 5 + 0 \times 4 + 1,5 \times 3}{5 + 4 + 3} = \text{ص}$$

$\therefore$  مركز ثقل السلك هو ( ١ ،  $\frac{3}{5}$  ) بالنسبة لنقطة ب

أى يبعد عن كل من ب د ، د ع مسافة : ١ ،  $\frac{3}{5}$  سم على الترتيب

الكتلة	ل	ل
س	٣٠	٢٠
ص	٢٠	٢٠

$$\therefore \text{سم} = \frac{11\frac{1}{4} \times 20 + 20 \times 20}{22} = \frac{130}{3}$$

$$\text{سم} = \frac{20 \times 20 + 30 \times 20}{22} = 20$$

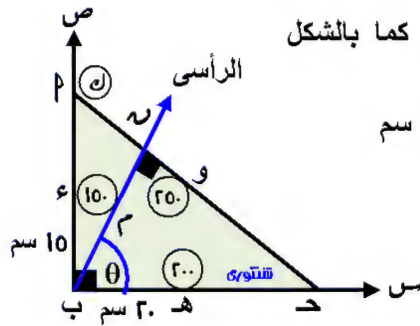
$\therefore$  احداثى مركز ثقل الصفيحة =  $(20, \frac{130}{3})$

أى يبعد عن  $\overline{AB}$  مسافة  $\frac{130}{3}$  سم ، عن  $\overline{AC}$  مسافة ٢٥ سم

(١٥) سلك رفيع منتظم السمك و الكثافة طوله ١٢٠ سم و كتلته ٦٠٠ جم

ثُنى على شكل مثلث  $ABC$  قائم الزاوية فى  $B$  فيه :  $AB = 30$  سم ، إذا ثبتت كتلة  $L$  جم عند الرأس  $A$  ، ثم عُلق السلك تعليقاً حراً من الرأس  $B$  فأتزن عندما كانت  $\overline{AD}$  أفقية فأوجد  $L$

**الحل**



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overrightarrow{BS}$  ،  $\overrightarrow{BS}$  كما بالشكل

المقابل و ذلك باعتبار نقطة  $B$  نقطة الأصل

$\therefore AB = 30$  سم ، طول السلك = ١٢٠ سم

$$\therefore BD + DC = 90 \text{ سم}$$

$$\text{بفرض أن : } BD = L \text{ سم}$$

$$\therefore DC = (90 - L) \text{ سم}$$

$\therefore$  مثلث  $ABC$  قائم الزاوية فى  $B$

$$\therefore (90 - L)^2 = L^2 + 90^2 \text{ ، ومنها : } L = 40 \text{ سم}$$

$$\therefore DC = 50 \text{ سم ، } BD = 40 \text{ سم}$$

$\therefore$  السلك منتظم  $\therefore$  يمكن اعتباره مكون من ٣ قضبان  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BD}$  ،  $\overline{DC}$

$$\therefore \text{الأطوال تتناسب مع الكتل ، } AB : BD : DC = 3 : 4 : 5$$

$$\text{كتلة السلك} = 600 \text{ جم ، مجموع الأجزاء} = 120$$

$$\therefore \text{قيمة الجزء} = \frac{600}{120} = 5$$

$\therefore$  احداثى مركز ثقل السلك =  $(2, 5)$

أى يبعد عن  $\overline{AB}$  مسافة ٧ سم ، عن  $\overline{AC}$  مسافة ٢,٥ سم

$$\text{عند التعليق من } B \text{ يكون : } \theta = 2,5 \div 7 = \frac{5}{14}$$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها  $\overline{AB}$  مع الرأسى فى وضع التوازن =  $\frac{5}{14}$

(١٤) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل شبه منحرف فيه

$$\angle A = 90^\circ \text{ ، } \angle B = 60^\circ \text{ ، } \angle C = 30^\circ$$

$AB = 60$  سم ،  $BC = 120$  سم ، عين مركز ثقل الصفيحة

عن كل من :  $\overline{AB}$  ،  $\overline{AC}$

**الحل**

نرسم  $DE \perp AB$

نعتبر الصفيحة مكونة من جزئين هما :

الصفيحة المستطيلة  $DE$  مركز ثقلها  $M$  ،

الصفيحة المثلثة  $EDC$  مركز ثقلها  $N$

$$\therefore \text{مساحة المستطيل } DEM : \text{مساحة المثلث } EDC = 60 \times 80 \times \frac{1}{2} : 40 \times 60 = 1 : 1$$

$$1 : 1 =$$

الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة  $\therefore$  المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن : كتلة المستطيل  $DEM$  =  $40$  سم ، كتلة المثلث  $EDC$  =  $L$

$\therefore$  الاتجاهين  $\overrightarrow{AB}$  ،  $\overrightarrow{AC}$  متعامدين و تكون احداثيات النقط هي :

$$M(0, 0) \text{ ، } E(0, 40) \text{ ، } D(80, 40) \text{ ، } C(120, 0)$$

$\therefore$  كتلة الصفيحة المستطيلة  $DEM$  =  $40$  سم تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه  $M(60, 20)$

، كتلة الصفيحة المثلثة  $EDC$  =  $L$  سم تؤثر عند نقطة تلاقى متوسطاته  $N$  حيث :

$$N = \left( \frac{0 + 120 + 80}{3}, \frac{0 + 0 + 40}{3} \right) = \left( \frac{200}{3}, \frac{40}{3} \right)$$

و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :



∴ بفرض أن كتل القضبان بالترتيب

هى : ١٥٠ ، ٢٠٠ ، ٢٥٠

، و تؤثر فى منتصف كل منها  
فتكون الكتل و احداثياتها كما  
بالجدول المقابل :

الكتلة	١٥٠	٢٠٠	٢٥٠	ن
س	٠	٢٠	٢٠	٠
ص	١٥	٠	١٥	٣٠

$$\therefore \text{س} = \frac{. \times \text{ن} + ٢٠ \times ٢٥٠ + ٢٠ \times ٢٠٠ + . \times ١٥٠}{\text{ن} + ٢٥٠ + ٢٠٠ + ١٥٠} = \frac{٩٠٠}{\text{ن} + ٦٠٠}$$

$$\text{ص} = \frac{٣٠ \times \text{ن} + ١٥ \times ٢٥٠ + . \times ٢٠٠ + ١٥ \times ١٥٠}{\text{ن} + ٢٥٠ + ٢٠٠ + ١٥٠} = \frac{٣٠٠ + ٦٠٠}{\text{ن} + ٦٠٠}$$

∴ م د أفقى ∴ الرأسى ب ن عمودى عليه

من هندسة الشكل : م ب × د = ب د × م د

∴ ٣٠ × ٤٠ = ٥٠ × ب ن ، ومنها : ب ن = ٢٤ سم ،

(ب د) = د م × د ب = ١٦٠٠ ∴ ٥٠ × ب ن = ١٦٠٠ ، ومنها : د ن = ٢٤ سم

$$\therefore \theta = \frac{٣٢}{٢٤} = \frac{٤}{٣} \quad \therefore \frac{٤}{٣} = \frac{\text{ن} + ٦٠٠}{٩٠٠} \times \frac{٣٠٠ + ٦٠٠}{\text{ن} + ٦٠٠}$$

∴ ٣٦٠٠ = ٩٠ + ن ، ومنها : ن = ٢٠٠ جم

(١٦) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل قرص دائرى

مركزه نقطة الأصل و طول نصف قطره ٢٤ سم ، قُطع منه

قرصان دائريان مركز أحدهما ( ٢ - ، ١٢ - ) ، و طول نصف

٤ سم ، و مركز الآخر ( ٦ ، ١٠ ) ، و طول نصف قطره

١٢ سم ، عين مركز ثقل الجزء الباقى من القرص

الحل

∴ الكتل تتناسب مع المساحات

∴ مساحة القرص م : مساحة القرص م : مساحة القرص م

$$٥٧٦ : \pi ١٦ : \pi ١٤٤ = ٩ : ٣٦ : ١$$

∴ نفرض أن : كتلة القرص م = ٣٦ ن

، كتلة القرص م = ٩ ن ، كتلة القرص م = ن

و باختيار الاتجاهين المتعامدين م س ، م ص  
، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣٦ ن	٩ ن	ن
س	٠	٦	٢
ص	٠	١٠	١٢

$$\therefore \text{س} = \frac{٠ \times \text{ن} - ٦ \times ٩ ن - ٠ \times ٣٦ ن}{\text{ن} - ٩ ن - ٣٦ ن} = \frac{(٢ -) \times \text{ن} - ٦ \times ٩ ن - ٠ \times ٣٦ ن}{\text{ن} - ٩ ن - ٣٦ ن}$$

$$\text{ص} = \frac{٠ \times \text{ن} - ١٠ \times ٩ ن - ٠ \times ٣٦ ن}{\text{ن} - ٩ ن - ٣٦ ن} = \frac{(١٢ -) \times \text{ن} - ١٠ \times ٩ ن - ٠ \times ٣٦ ن}{\text{ن} - ٩ ن - ٣٦ ن}$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقى هو : ( ٢ - ، ٣ - ) بالنسبة لنقطة الأصل م

(١٧) م ب د ع صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه :

م ب = ٤٠ سم ، ب د = ٦٠ سم ، تقاطع قطريه فى م ،

قُطع المثلث ب د م هـ ثم عُلِق الباقى تعليقاً حراً من الرأس

د ، عين ظل زاوية ميل د ب على الرأسى فى وضع الاتزان

الحل

نختار اتجاهين متعامدين د س ، د ص كما بالشكل

المقابل وذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل

∴ مساحة المثلث م ب د : مساحة المستطيل م ب د ع

$$= \frac{١}{٢} \times ٦٠ \times ٢٠ : ٤٠ \times ٦٠$$

$$= ١ : ٤$$

∴ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المثلث م ب د = ن ، تؤثر فى م حيث :

$$\text{م} = \left( \frac{١}{٣} (٠ + ٦٠ + ٣٠) , \frac{١}{٣} (٠ + ٠ + ٢٠) \right) = \left( \frac{١}{٣} (٩٠) , \frac{١}{٣} (٢٠) \right)$$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

ل <sub>١</sub>	ل <sub>٢</sub>	عند ب	عند ح	عند ء	
٤٠ ل	٥ -	١٠	٥	٥	الكتلة
٢٤	٤٠	٤٨	٠	٠	س
٢٤	٤٠	٠	٠	٤٨	ص

$$\frac{748}{11} = \frac{. \times 0 + . \times 0 + 28 \times 1 + 2. \times 0 - 72 \times 2.}{0 + 0 + 1. + 0 - 2.} = 33 \therefore$$

$$\frac{f_{ii}}{11} = \frac{2 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times 0 - 2 \times 2}{0 + 0 + 1 + 0 - 2} = \text{ص}$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو :  $(\frac{248}{11}, \frac{200}{11})$  بالنسبة لنقطة الأصل حـ

عند التعليق من ح يكون :  $\theta = \frac{200}{11} \div \frac{248}{11} = 0$  طا

أى أن : ظل الزاوية التي يصنعها  $\overline{ب د}$  مع الرأسى فى وضع التوازن  $= \frac{29}{31}$

(19) ب د - صفیحة رقیقة منتظمة السمك و الكثافة على هیئة مثلث

قائم الزاوية في ب حيث :  $\angle ب = ١٢$  سم ،  $\angle د = ٢٠$  سم ،

و كانت س ، ص ، ع منتصفات  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  ،  $\overline{CA}$  على

الترتيب ، قطع المثلث د ص ع و طبق على المثلث ص ب س

فإذا علقت المجموعة تعليقاً حراً من النقطة ب ، اوجد ظل زاوية

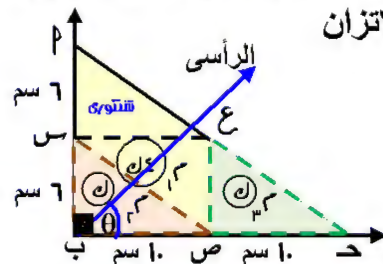
ميل بـ ح على الرأسى فى وضع الاتزان



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{b}$  ،  $\vec{c}$

كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب

نقطة الأصل



، كتلة المستطيل  $١٠٠ \text{ كجم}$  ، تؤثر في  $(٢٠ ، ٣٠)$  ،  
و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلي :

الكتلة	٤ ك	- ك
س	٣٠	٢٠
ص	٣٠	$\frac{٢٠}{٣}$

$$3. = \frac{2. \times 1 - 3. \times 14}{1 - 14} = 2.5 \therefore$$

$$r_2 \frac{4}{9} = \frac{\frac{r_1}{3} \times 1 - 3. \times 12}{1 - 12} = \text{ص ٢}$$

∴ موضع مركز الثقل هو  $( ٣٠. ، ٢٤ \frac{٤}{٩} )$  بالنسبة لنقطة ح

عند التعليق من د يكون : طأ  $\frac{22}{27} = 3. \div 24 \frac{4}{9} = 0$

∴ ظل زاوية ميل  $\overline{ح ب}$  على الرأسى  $\frac{٢٢}{٢٧}$

(١٨) ب د ء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم

و كتلتها ٤. جم ، النقطتان ل ، م منتصفا  $\overline{AB}$  ،  $\overline{AC}$  على الترتيب

قَطْع المثلث  $LM$  ثم ثَبِّت عند كل من  $د$  ،  $ء$  كتلة تساوي كتلة

المثلث المقطوع ، وثبتت عند ب كتلة نساوي ضعف كتلة المثلث

المقطوع ، فإذا عُلقت المجموعة تطبيقاً حراً من النقطة د ، أوجد

ظل زاوية ميل  $\overline{b\text{--}c}$  على الرأسى فى وضع الاتزان



نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{ds}$  ،  $\vec{ds'}$  كما بالشكل

المقابل وذلك باعتبار نقطة ح نقطة الأصل

∴ مساحة المثلث  $LM$  : مساحة المربع  $ABDE$

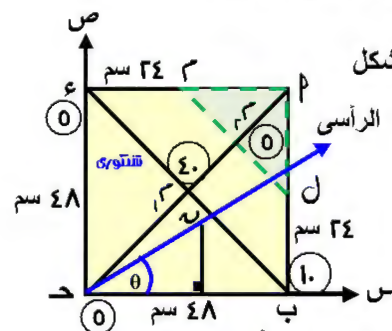
$$\Sigma \Lambda \times \Sigma \Lambda : \Gamma \Sigma \times \Gamma \Sigma \times \frac{1}{\epsilon} =$$

$$= 1 : \Lambda, \therefore \text{الصفحة منتظمة الكثافة}$$

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

∴ كتلة المربع  $P$  بـ  $د = " ٤٠ "$  جم ، و تؤثر في  $م$  ،

∴ كتلة المثلث  $AlM = 0$  جم ، و تؤثر في م حيث :





$$\begin{aligned}
 & \text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 10) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (2 + 0 + 0) \right) \\
 & \text{الصفحة المثلثة ص ع س ، وكتلتها = ٢ ، تؤثر فى ٢ حيث :} \\
 & \text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 10 + 10) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 0) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (2 + 1 + 0) \right) \\
 & \text{الصفحة المثلثة ع س ، وكتلتها = ٢ ، تؤثر فى ٢ حيث :} \\
 & \text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 10 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 12) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 12) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 0) \right) \\
 & \text{، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :}
 \end{aligned}$$

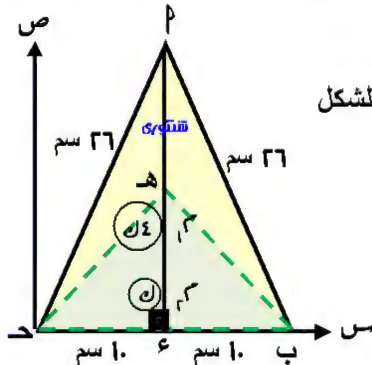
الكتلة	٢	٢	٢
س	$\frac{10}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$
ص	٢	٤	٨

$$\begin{aligned}
 & \text{٢} = \frac{\frac{10}{3} \times ٢ + \frac{20}{3} \times ٢ + \frac{10}{3} \times ٨}{٢ + ٢ + ٨} \\
 & \text{٢} = \frac{٨ \times ٢ + ٤ \times ٢ + ٢ \times ٨}{٢ + ٢ + ٨} = \text{ص}
 \end{aligned}$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو :  $(\frac{20}{3}, \frac{4}{3})$  بالنسبة لنقطة الأصل ب

(٢) صفحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مثلث م ب د

المتساوى الساقين حيث : م ب = م د = ٢٦ سم ، ب د = ٢٠ سم  
رسم م ب د ⊥ ب د و يقطع ب د فى ع ، فإذا كانت ه منتصف م ب  
م ب و فصل المثلث ه ب د ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي  
عن نقطة ه



**الحل**  
نختار اتجاهين متعامدين د س ، د ص كما بالشكل  
المقابل وذلك باعتبار نقطة د نقطة الأصل  
من هندسة الشكل :  
م ب = ٢٤ سم ، ع ه = ١٢ سم ،  
مساحة المثلث م ب د : مساحة المثلث ه ب د  
١ : ٢ =

$$\begin{aligned}
 & \text{∴ مساحة المثلث م ب د : مساحة المثلث ص ب س : مساحة المثلث د ص ع} \\
 & ١ : ١ : ٤ = \frac{1}{3} \times ١٠ \times ٦ : \frac{1}{3} \times ١٠ \times ٦ : \frac{1}{3} \times ١٠ \times ٢٠
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{الصفحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل} \\
 & \text{بفرض أن كتلة المثلث م ب د = ٤ ن ، تؤثر فى ٢ حيث :} \\
 & \text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 12) \right), \left( \frac{1}{3} (20 + 0 + 0) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (2 + 0 + 0) \right) \\
 & \text{كتلة المثلث ص ب س = ٤ ن ، تؤثر فى ٢ حيث :} \\
 & \text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 10) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 0 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (2 + 0 + 0) \right) \\
 & \text{كتلة المثلث د ص ع = ٤ ن ، تؤثر فى ٢ حيث :}
 \end{aligned}$$

$$\text{٢} = \left( \frac{1}{3} (0 + 10 + 20) \right), \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 0) \right) = \left( \frac{1}{3} (0 + 1 + 0) \right), \left( \frac{1}{3} (2 + 0 + 0) \right)$$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٤	٤	٤
س	$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{40}{3}$
ص	٤	٢	٢

$$\begin{aligned}
 & \text{٢} = \frac{\frac{20}{3} \times ٤ - \frac{10}{3} \times ٢ + \frac{40}{3} \times ٢}{٤ - ٢ + ٢} \\
 & \text{٢} = \frac{٢ \times ٢ - ٢ \times ٢ + ٤ \times ٤}{٢ - ٢ + ٤} = \text{ص}
 \end{aligned}$$

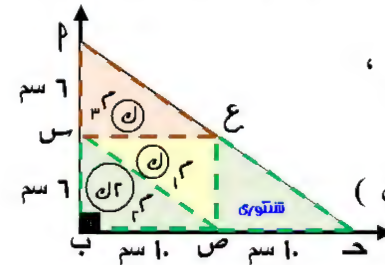
∴ مركز ثقل المجموعة هو :  $(\frac{40}{3}, \frac{4}{3})$  بالنسبة لنقطة الأصل ب

عند التعليق من ب يكون : طا  $\theta = \frac{40}{3} \div 4 = \frac{10}{3}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها ب د مع الرأسى فى وضع التوازن  $\frac{40}{3}$

**حل آخر " لايجاد مركز الثقل "**

باعتبار نقطة ب نقطة الأصل كما بالشكل المقابل ،  
بفرض أن كتلة الصفحة = ٤ ن ،  
فى الوضع الجديد تصبح الصفحة مكونة من  
الصفحة المثلثة ص ب س (مكونة من طبقتين)  
فتكون كتلتها = ٢ ن ، تؤثر فى ٢ حيث :





، كتلة المثلث م ب د = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٤٨) = م$$

، كتلة المثلث م ع د = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) = م$$

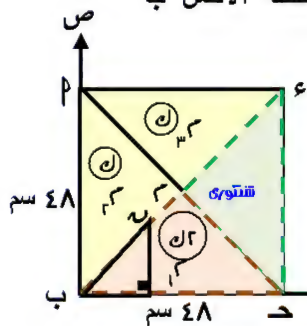
، ويكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	ل ٤	ل	ل -
س	٢٤	٢٤	٤٠
ص	٢٤	٨	٢٤

$$\therefore س = \frac{٤٠ \times ل - ٢٤ \times ل + ٢٤ \times ل}{ل - ل + ل} = ٢٠$$

$$ص = \frac{٢٤ \times ل - ٨ \times ل + ٢٤ \times ل}{ل - ل + ل} = ٢٠$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو : ( ٢٠ ، ٢٠ ) بالنسبة لنقطة الأصل ب



باعتبار نقطة ب نقطة الأصل كما بالشكل المقابل ،

بفرض أن كتلة الصفيحة = ل ،

فى الوضع الجديد تصبح الصفيحة مكونة من

الصفيحة المثلثة م ب د ( مكونة من طبقتين )

فتكون كتلتها = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٤٨) = م$$

الصفيحة المثلثة م ع د ، وكتلتها = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) = م$$

الصفيحة المثلثة م ب د ، وكتلتها = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٤٨) = م$$

، ويكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

، ∴ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

، بفرض أن كتلة المثلث م ب د = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٠ + ٤٨) = م$$

، كتلة المثلث م ب د = ل ، تؤثر فى م ، حيث :

$$م = \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) ، \frac{1}{3} (٢٤ + ٤٨ + ٠) = م$$

، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	ل ٢	ل -
س	١٠	١٠
ص	٨	٤

$$\therefore س = \frac{١٠ \times ل - ١٠ \times ل}{ل - ل} = ١٠$$

$$ص = \frac{٤ \times ل - ٨ \times ل}{ل - ل} = ١٢$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو : ( ١٠ ، ١٢ ) بالنسبة لنقطة الأصل د

أى أن : مركز ثقل الجزء الباقي ينطبق على نقطة هـ

∴ بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن النقطة هـ = صفر

(٢١) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مربع م ب د ع

طول ضلعه ٤٨ سم ، م نقطة تقاطع قطريه ، قُطع المثلث د م ع

ثم لُصق على المثلث د م ب بحيث انطبق م ع على م ب ، أوجد

بعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من ب ، د

**الحل**

باختيار الاتجاهين المتعامدين ب س ، ب ص كما بالشكل

المقابل و ذلك باعتبار نقطة ب نقطة الأصل

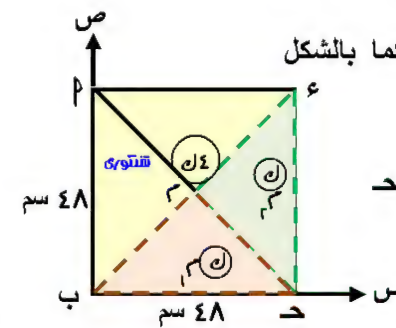
من هندسة الشكل :

مساحة المربع م ب د ع : مساحة المثلث م ب د

مساحة المثلث م ع د = ٤ : ١ : ١

، بفرض أن كتلة المربع م ب د ع = ل

، تؤثر فى م ، حيث : م = ( ٢٤ ، ٢٤ )



، و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتلة	٣٢ ك	٥ ك
س	١٠	$\frac{٥٠}{٣}$
ص	٨	٨

$$\frac{٧١٠}{٨١} = \frac{\frac{٥٠}{٣} \times ١٠ - ١٠ \times ٣٢}{١٠ - ٣٢} = \text{س} \therefore$$

$$\text{ص} = \frac{٨ \times ١٠ - ٨ \times ٣٢}{١٠ - ٣٢} = \text{ص} \therefore$$

∴ مركز ثقل الجزء الباقي هو :  $(٨ , \frac{٧١٠}{٨١})$  بالنسبة لنقطة الأصل ء

∴ مركز ثقل الجزء الباقي يبعد  $\frac{٧١٠}{٨١}$  سم ، ٨ سم عن كل من دء ، ء پ

على الترتيب ، عند التعليق من ء يكون : طا  $\theta = \frac{٧١٠}{٨١} \div ٨ = \frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

أى أن : ظل الزاوية التى يصنعها ء پ مع الرأسى فى وضع التوازن =  $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$

(٢٣) تُثبت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٣٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند

الرؤوس م ، ب ، د ، ء ، هـ ، و على الترتيب لمسدس منتظم طول ضلعه ٣٠ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن مركز المسدس

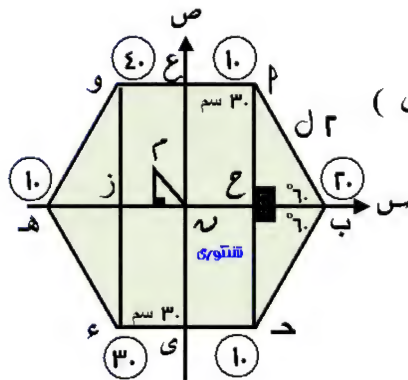
الحل

كما بالشكل المقابل : نقطة ن ( مركز المسدس ) نقطة الأصل ، بفرض أن : من هندسة الشكل :

$$\begin{aligned} \text{م} \text{ ع} &= \text{و} \text{ ع} = \text{د} \text{ ي} = \text{ء} \text{ ي} = ٣٠ \text{ سم} \\ \text{م} \text{ ح} &= \text{ل} \text{ ح} = ٦٠^\circ \quad ٣٠ = \sqrt{٣} \text{ سم} \\ \text{بالمثل : د} \text{ ح} &= \text{و} \text{ ز} = \text{ء} \text{ ز} \\ ٣٠ &= \sqrt{٣} \text{ سم} \end{aligned}$$

$$\text{ب} \text{ ن} = \text{هـ} \text{ ع} = ٦٠ \text{ سم}$$

و نكون جدول الأوزان واحداثياتها كما يلى :



$$\therefore \text{س} = \frac{٨ \times ١٠ + ٢٤ \times ١٠ + ٢٤ \times ١٠}{١٠ + ١٠ + ٢٤} = ٢٠$$

$$\text{ص} = \frac{٢٤ \times ١٠ + ٤٠ \times ١٠ + ٨ \times ٢٤}{١٠ + ١٠ + ٢٤} = \text{ص} \therefore$$

الكتلة	٢٤ ك	٢٤ ك	١٠ ك
س	٢٤	٢٤	٨
ص	٨	٤٠	٢٤

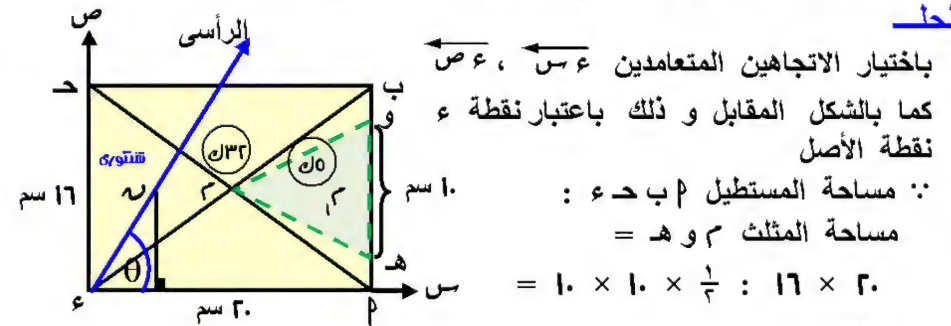
∴ مركز ثقل المجموعة هو :  $(٢٠ , ٢٠)$  بالنسبة لنقطة الأصل ب

(٢٢) صفيحة رقيقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطيل م ب د ء

مركزه م ، حيث : م ب = ١٦ سم ، ب د = ٢٠ سم ، أخذت

النقطتان هـ ، و على م ب حيث : م هـ = ب و = ٣ سم ، إذا قُطع المثلث م هـ و ، فأوجد بُعد مركز الثقل عن كل من دء ، ء م ، و إذا غُلق هذا الجزء تعليقاً حراً من ء فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها ء م مع الرأسى

الحل



باختيار الاتجاهين المتعامدين ء س ، ء ص كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ء نقطة الأصل

∴ مساحة المستطيل م ب د ء :  
مساحة المثلث م هـ و =

$$= ١٠ \times ١٠ \times \frac{١}{٢} : ١٦ \times ٢٠$$

$$٣٢ : ٥$$

∴ الصفيحة منتظمة الكثافة ∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المستطيل م ب د ء = ٣٢ ك ، تؤثر فى م حيث :  
 $(٨ , ١٠) = \text{م}$

كتلة المثلث م هـ و = ٥ ك ، تؤثر فى م حيث :

$$\text{م} = \left( \frac{١}{٣} (٢٠ + ٢٠ + ١٠) , \frac{١}{٣} (٨ + ١٦ + ٣) \right) = \left( \frac{٥٠}{٣} , ٨ \right)$$



باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\overrightarrow{DS}$  ،  $\overrightarrow{DS}$  كما بالشكل المقابل  
وذلك باعتبار نقطة  $D$  نقطة الأصل ،  
بفرض أن :  $BO = L$  سم  
∴ مساحة المستطيل  $PODE$  :  
مساحة المثلث  $POH$  =

$$16 \times 20 : 16 \times 10 \times \frac{1}{2} = 80 : L$$

∴ الصفیحة منتظمة الكثافة ،  
∴ المساحات تتناسب مع الكتل ،  
بفرض أن كتلة المستطيل  $PODE$  =  
 $80 = L$  ، تؤثر في  $M$  حيث :

$$M = (8, 12.5)$$

، كتلة المثلث  $POH$  =  $L$  ، تؤثر في  $M$  حيث :

$$M = \left( \frac{1}{3}(16 + 16 + 16), \frac{1}{3}(0 + L + 0) \right) = \left( \frac{48}{3}, \frac{L}{3} \right) = (16, \frac{L}{3})$$

∴ الصفیحة فى مستوى رأسى ،  $\overrightarrow{DH}$  على نضد أفقى ،  
الصفیحة على وشك الدوران حول النقطة  $H$  ،

∴ (  $M$  ) مركز ثقل الجزء الباقي يقع على  $\overrightarrow{HM}$  ، و يكون :  $SM = 16$

$$SM = \frac{\frac{20}{3} \times L - 8 \times 80}{L - 80} = \frac{\frac{20}{3} \times L - 640}{L - 80} \therefore 16 = \frac{\frac{20}{3} \times L - 640}{L - 80}$$

$$16(L - 80) = \frac{20}{3}L - 640 \therefore 16L - 1280 = \frac{20}{3}L - 640$$

ومنها :  $L = 24$  أى أن :  $BO = 24$  سم

الكتلة	م	ب	ح	ء	هـ	و
١٠	٢٠	١٠	٣٠	١٠	١٠	٤٠
٣٠	٦٠	٣٠	٣٠	٣٠	٦٠	٣٠
$\sqrt{3} \times ٣٠$	٠	$\sqrt{3} \times ٣٠$	$\sqrt{3} \times ٣٠$	$\sqrt{3} \times ٣٠$	٠	$\sqrt{3} \times ٣٠$

$$\therefore SM = \frac{(30 \times 10) + (60 \times 20) + (30 \times 30) + (30 \times 10) + (60 \times 10) + (30 \times 10)}{10 + 20 + 30 + 10 + 60 + 10} = 12.5$$

$$SM = 12.5$$

$$SM = \frac{\sqrt{3} \times 30 \times 10 + 0 + (\sqrt{3} \times 30) \times 30 + (\sqrt{3} \times 30) \times 10 + 0 + \sqrt{3} \times 30 \times 10}{10 + 20 + 30 + 10 + 60 + 10} = 12.5$$

$$SM = 12.5$$

∴ إحداثى مركز الثقل =  $(12.5, 12.5)$  بالنسبة للنقطة  $H$

$$VO = (12.5) + (12.5) = (25) \therefore$$

∴ بُعد مركز الثقل عن مركز المسدس =  $SM = 25$  سم

(٢٤) صفیحة رقیقة منتظمة السمك و الكثافة على شكل مستطیل  $PODE$

الذى فيه :  $BO = 20$  سم ،  $BD = 16$  سم ، فُرضت نقطة

$H \in \overrightarrow{BD}$  ، و  $\overrightarrow{DH} \perp \overrightarrow{BD}$  بحيث :  $BO = 10$  سم ، ثم فُصل

المثلث  $POH$  ، و وُضعت الصفیحة فى مستوى رأسى بحيث انطبق

حرفها  $\overrightarrow{DH}$  على نضد أفقى أملس فكانت الصفیحة على وشك

الدوران أوجد طول  $\overrightarrow{BO}$

الحل



## اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

## الاختبار الأول

السؤال الأول : أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٦) مركز ثقل جسمين ماديين كتل كل منهما ٣ نيوتن ، ٦ نيوتن

و المسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة

.... سم

(٦) ٠ (ب) ١٠ (د) ٧,٥ (ع) ٩

الحل

باعتبار أن الخط الواصل بين الجسمين يقع على محور السينات و أن نقطة الأصل تقع عند الكتلة ٣ نيوتن فيكون :  $٠ = س_٣$  ،  $١٥ = س_٦$  ،  $٣ = ل_٣$  ،  $٦ = ل_٦$

$$١٠ = \frac{١٥ \times ٦ + ٠ \times ٣}{٦ + ٣} = س_م$$

أى أن : مركز ثقل الكتلتين الماديين يقع على مسافة ١٠ متر من الكتلة الأولى

حل آخر

بفرض أن : مركز الثقل يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة = س سم

$$٣ = س_٣ \quad ٦ = (١٥ - س) \quad ٣ = س_٦ \quad ٩٠ = ل_٦ - ٦ س$$

و منها : س = ١٠ سم

## السؤال الرابع :

(٢) م ب د مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم ، اثرت الأوزان ٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه ، عين موضع مركز ثقل المجموعة

الحل

نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{m}$  ،  $\vec{p}$  ،  $\vec{p}$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة م نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

$$د = ١٠ = ٦٠^\circ \quad ٣٠^\circ = ٣٠^\circ$$

فيكون : م (٠،٠) ، ب (٠،١٠) ، د (٣٠،٥)

و نكون جدول الأوزان و احداثياتها كما يلى :

	م	ب	د
الوزن	٣	٦	٩
س	٠	١٠	٥
ص	٠	٠	٣٠

$$س_م = \frac{٠ \times ٩ + ١٠ \times ٦ + ٥ \times ٣}{٩ + ٦ + ٣} = \frac{٩٠}{١٨} = ٥$$

$$ص_م = \frac{٣٠ \times ٩ + ٠ \times ٦ + ٥ \times ٣}{٩ + ٦ + ٣} = \frac{٣٠٠}{١٨} = \frac{٥٠}{٣}$$

$$\frac{٥٠}{٣} = \frac{٥٠}{٣}$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{٥٠}{٣}, \frac{٥٠}{٣})$  بالنسبة للنقطة م

## السؤال الخامس :

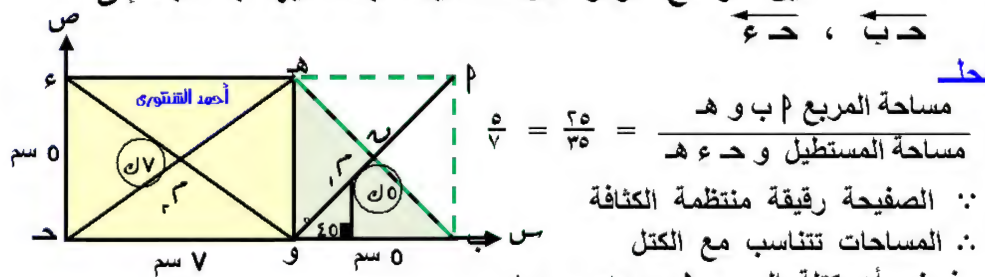
(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل م ب د ع فيه :

م ب = ٥ سم ، ب د = ١٢ سم ، هـ  $\in$  م ب بحيث م هـ = ٥ سم

ثنى المثلث م ب د حول الضلع ب هـ حتى أنطبق م ب على ب د

تماماً ، عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى : د ب ، د ع

الحل



$$\frac{٥}{١٢} = \frac{٥}{١٢} = \frac{٥}{١٢}$$

∴ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المربع م ب د هـ = ٥ ل

## الاختبار الثانى

**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
(٦) تؤثر الكتلة ٥ كجم فى النقطة ( ٢ ، ١ - ) وتؤثر الكتلة ٧ كجم

فى النقطة ( ٢ ، ١ )

فإن : مركز ثقل الكتلتين يؤثر فى النقطة ....

(ب) ( ٩ ، ١٧ ) (ب) ( ٣ ، ١٧ )

(د) ( ١٩ ، ١٣ ) (ع) ( ١٢ ، ١٤ )

الكتلة	٥	٧
س	٢	١
ص	١ -	٢

$$\frac{17}{12} = \frac{1 \times 7 + 2 \times 0}{7 + 0} = \text{س} \therefore$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1 \times 7 + (1-) \times 0}{7 + 0} = \text{ص} \therefore$$

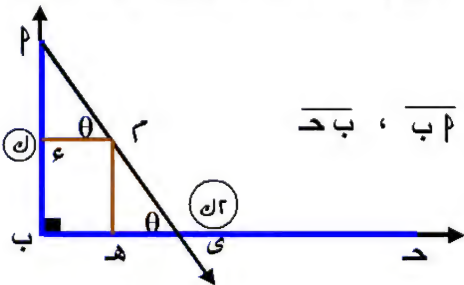
$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{3}{4} , \frac{17}{12} \right)$$

## السؤال الرابع :

(٢) ثنى قضيب منتظم  $\overline{AB}$  طوله ١٥ ل من نقطة ب حيث  $\angle B = 90^\circ$

بحيث  $\angle B = 90^\circ$  وعلق القضيب من الطرف  $\overline{AB}$  تعليقا

حرأ فاثبت أن  $\overline{AB}$  يميل على الأفقى بزاوية  $\theta$  حيث  $\tan \theta = \frac{4}{3}$



القضيب منتظم

يمكن اعتباره مكون من القضيبين :  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$

كل منهما منتظم و من نفس المادة

$$\therefore \angle B = 90^\circ , \angle A = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ$$

$\therefore$  كتلة المستطيل و  $\overline{AB} = 7$  ل

،  $\therefore$  الاتجاهين  $\overline{AB}$  ،  $\overline{BC}$  متعامدين

$\therefore$  كتلة المستطيل و  $\overline{AB} = 7$  ل تؤثر عند نقطة تلاقى قطريه  $\left( \frac{7}{2} , \frac{7}{2} \right)$

، كتلة المربع  $\overline{BC}$  و  $\overline{AB}$  فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات  $\triangle ABC$  و  $\overline{BC}$

$$\text{من هندسة الشكل نجد : } \overline{AB} = 7 \text{ ل و } \overline{BC} = 4 \text{ ل}$$

$$\therefore \overline{AB} = 7 \text{ ل و } \overline{BC} = 4 \text{ ل}$$

$$\therefore \left( \frac{7}{2} , \frac{7}{2} \right) = \left( \frac{7}{2} , \frac{7}{2} \right) \times \cos 40^\circ + 7 \times \sin 40^\circ = \left( \frac{7}{2} , \frac{7}{2} \right)$$

و يكون جدول الكتب والاحداثيات كما يلى :

المستطيل و $\overline{AB}$	المربع $\overline{BC}$ و $\overline{AB}$	الكتلة
$\overline{AB} = 7$ ل	$\overline{BC} = 4$ ل	٧
$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{2}$	س
$\frac{7}{2}$	$\frac{4}{2}$	ص

$$\therefore \text{س} = \frac{\frac{7}{2} \times 7 + \frac{4}{2} \times 4}{7 + 4} = \frac{40.7}{11}$$

$$\text{ص} = \frac{\frac{7}{2} \times 7 + \frac{4}{2} \times 4}{7 + 4} = \frac{100}{11}$$

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{40.7}{11} , \frac{100}{11} \right)$$

### السؤال الخامس :

(٢) بـ د مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ء نقطة منتصف  $\overline{بـ د}$  ، ثبت كتل مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ٧٥ ، ٤٥ ، ٤٥ في النقط م ، ب ، ء ، د ، م على الترتيب عين مركز ثقل هذه المجموعة ، وإذا رفعت الكتلة الموجودة عن ب فإين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{ds}$  ،  $\vec{ds'}$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة  $d$  نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

$$p = r. \text{ ح. } \gamma. = \sqrt[3]{1.} \text{ سم}$$

فيكون : د ( . ، . ) ، ع ( . ، | . ) ،

( $\sqrt{13} \frac{1}{2}$  , 1.) ر , ( $\sqrt{13}$  1. , 1.) پ , ( . , 2.) ب

و نڪون جدول ڪٽل و اڃاڻاڻاها ڪما يلى :

عند د	عند ء	عند ب	عند پ	عند م	
٤٥	٧٥	٣٠	١٥	٤٥	الكتلة
.	١٠	٢٠	١٠	١٠	س
.	.	.	$\sqrt[3]{١٠}$	$\sqrt[3]{\frac{١}{٣}}$	ص

$$\frac{60}{V} = \frac{1 \times 20 + 1 \times 10 + 2 \times 3 + 1 \times 70 + 1 \times 20}{20 + 10 + 3 + 70 + 20} = \frac{116}{126} \therefore$$

$$\overline{\sqrt{y}}^{\frac{1}{y}} = \frac{\overline{\sqrt{y}}^{\frac{1}{y}} \times \Sigma 0 + \overline{\sqrt{y}}^{\frac{1}{y}} \times 10 + \dots \times V_0 + \dots \times \Sigma 0}{\Sigma 0 + 10 + \dots + V_0 + \Sigma 0} = \text{صم}$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{6}{\sqrt{3}})$  بالنسبة للنقطة حـ

$$۲ : ۱ = ح ب : ب پ \therefore$$

، ∴ الأوزان تتناسب مع الأطوال

∴ بفرض أن كتلة من القضيبين هما  $L$  ،  $2L$  على الترتيب  
و مركز ثقل كل منهما يؤثر عند منتصفه أي  $e$  ،  $y$  كما بالشكل  
و بأخذ الاتجاهين المتعامدين  $b \leftarrow$  ،  $b \rightarrow$  يكون :

( د ۵ ، . ) ء ، ( . ، د ۵ ) ی

و نكون الجدول المقابل :

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{. \times 2 + 10 \times 2}{2 + 2} = \text{مستم}$$

$$D_{\frac{e}{r}} = \frac{D_{\frac{e}{r}} \times D_{+} \times D_{r}}{D_{+} \times D_{r}} = \text{صم}$$

∴ احداثي مركز الثقل =  $(\frac{1}{3}l, \frac{5}{3}l)$  بالنسبة لنقطة ب

أى أن : م ء = ١ : ٤ ، م هـ = ب ء = ٥ : ٤

عند التعليق الحر من  $\mu$  نجد أن  $\overline{m} \leftarrow$  هو الخط الرأسى

و بفرض أن :  $\overline{b-d}$  يصنع مع  $\overline{m}$  زاوية قياسها  $\theta$

من هندسة الشكل نجد :  $p = b - b = a$  -  $o = \frac{a}{2}$  -  $\frac{a}{2} = \frac{p}{2}$

$$\frac{e}{f} = \mathcal{O} \frac{e}{f} \div \mathcal{O} \frac{fe}{f} = \theta \text{ ط } \therefore$$

∴  $\overline{b-d}$  يميل على الأفقى بزاوية ظلها = طا (  $\theta - 90^\circ$  ) = طنا  $\theta = \frac{4}{5}$



## الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

الحلـ

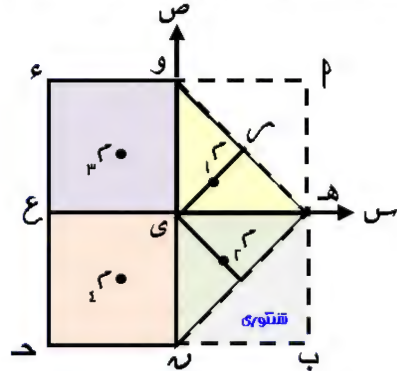
مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند نقطة تقاطع المتوسطات

السؤال الرابع :

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه  $l$  فإذا كان  $هـ$  ،

و ،  $هـ$  منتصفات  $م ب$  ،  $م ع$  ،  $م د$  على الترتيب ، ثنى المثلث  $م$  هو حول الضلع  $هـ و$  بحيث انطبقت  $م$  على مركز المربع  $ي$  وثنى المثلث  $ب هـ د$  على الضلع  $هـ و$  بحيث انطبق الرأس  $ب$  على مركز المربع  $ي$  ، عين مركز ثقل الصفيحة فى وضعها الجديد

الحلـ



نأخذ الاتجاهين المتعامدين  $ي هـ$  ،  $ي و$  :  
الصفيحة رقيقة منتظمة

∴ يمكن اعتبار الصفيحة مكونة من

٤ أجزاء كما بالشكل

من هندسة الشكل :

$$ي م = \frac{l}{2} \quad ي و = \frac{l}{2} \quad ي هـ = \frac{l}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{l}{3}$$

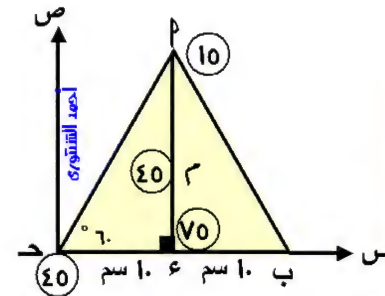
$$ل م = \frac{l}{2}$$

$$∴ م = (ل م \cos 45^\circ, ل م \sin 45^\circ) = (\frac{l}{2} \cos 45^\circ, \frac{l}{2} \sin 45^\circ)$$

$$هـ = (\frac{l}{2} \cos 45^\circ, \frac{l}{2} \sin 45^\circ) = (\frac{l}{2} \cos 45^\circ, \frac{l}{2} \sin 45^\circ)$$

$$ب = (\frac{l}{2} \cos 45^\circ, \frac{l}{2} \sin 45^\circ) = (\frac{l}{2} \cos 45^\circ, \frac{l}{2} \sin 45^\circ)$$

$$∴ \text{كتلة الصفيحة المثلثة وهى المكونة من طبقتين } ل \text{ ، و مركزها } م$$



$$∴ س_م = \frac{10 \times 20 + 10 \times 10 + 10 \times 0 + 0 \times 20}{20 + 10 + 10 + 20} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$ص_م = \frac{\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2} \times 10 + 0 \times 10 + 0 \times 20}{20 + 10 + 10 + 20} = \frac{15}{4} = \frac{15}{4}$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{5}{2}, \frac{15}{4})$  بالنسبة للنقطة د

حل آخر للجزء الثانى :

∴ كتلة المجموعة = ٢١.

$$\text{مركز ثقلها } (\frac{15}{4}, \frac{5}{2})$$

فيكون جدول الكتل واحداثياتها كما يلى :

الكتلة	٢١.	٣٠.
س	$\frac{15}{4}$	٢٠.
ص	$\frac{5}{2}$	٠.

$$∴ س_م = \frac{20 \times 30 - \frac{15}{4} \times 21}{30 - 21} = \frac{10}{1}$$

$$ص_م = \frac{0 \times 30 - \frac{5}{2} \times 21}{30 - 21} = \frac{15}{3} = 5$$

∴ احداثى مركز الثقل =  $(\frac{5}{2}, \frac{15}{4})$  بالنسبة للنقطة د

الكتلة	ل	ل	ل ٢
س	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل$	.
ص	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل -$

$$\therefore س_م = \frac{ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times (\frac{1}{4} ل -)}{ل + ل + ل + ل} = \frac{1}{4} ل$$

$$ص_م = \frac{ل \times \frac{1}{4} ل - ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times .}{ل + ل + ل + ل} = \text{صفر}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{4} ل ، .)$  بالنسبة لمركز الصفيحة

السؤال الخامس :

(٢) اوجد مركز ثقل التوزيع التالى :

و<sub>١</sub> = ٢٠ نيوتن و يؤثر فى (٢، ١) ، و<sub>٢</sub> = ١٥ نيوتن و يؤثر

فى (٣ -، ١) ، و<sub>٣</sub> = ٢٥ نيوتن و يؤثر فى (١ -، ١)

الحل

$$\therefore س_م = \frac{٢٠ \times ٢ + ١٥ \times ٣ - ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٠} = \frac{١}{٣}$$

$$ص_م = \frac{٢٠ \times ١ - ١٥ \times ١ + ٢٥ \times ١}{٢٠ + ١٥ + ٢٠} = \frac{١}{٣}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{3} ، \frac{1}{3})$

، كتلة الصفيحة المثلثة ه هـى المكونة من طبقتين = ل ، و مركزها م<sub>١</sub>  
، كتلة الصفيحة المربعة وى ع = ل ، و مركزها م<sub>٢</sub>  
، كتلة الصفيحة المربعة ي هـ د = ل ، و مركزها م<sub>٣</sub>  
و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

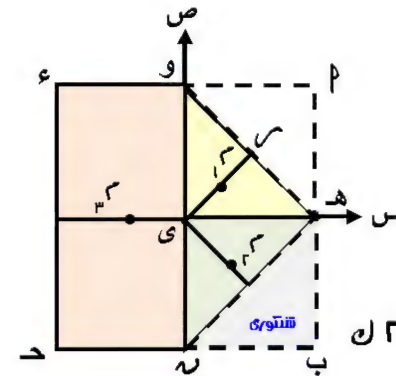
الكتلة	ل	ل	ل	ل
س	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل -$
ص	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل$	$\frac{1}{4} ل -$	$\frac{1}{4} ل -$

$$\therefore س_م = \frac{ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times (\frac{1}{4} ل -) + ل \times (\frac{1}{4} ل -)}{ل + ل + ل + ل} = \frac{1}{4} ل$$

$$ص_م = \frac{ل \times \frac{1}{4} ل - ل \times \frac{1}{4} ل + ل \times (\frac{1}{4} ل -) + ل \times (\frac{1}{4} ل -)}{ل + ل + ل + ل} = \text{صفر}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{4} ل ، .)$  بالنسبة لمركز الصفيحة

حل آخر :



نأخذ الاتجاهين المتعامدين ي هـ ، وى و  
يمكن اعتبار الصفيحة مكون من ٣ أجزاء  
الصفيحة المثلثة و هـى المكونة من طبقتين  
و كتلتها = ل ، و مركزها م<sub>١</sub>  
الصفيحة المثلثة ل هـى المكونة من طبقتين  
و كتلتها = ل ، و مركزها م<sub>٢</sub>  
الصفيحة المستطيلة و ع د هـ ، و كتلتها = ٢ ل  
و مركزها م<sub>٣</sub> =  $(\frac{1}{4} ل ، .)$   
و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

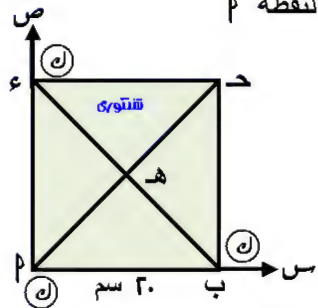
٢	ب	د	ء
الكتلة	ل	ل	ل
س	٠	٢٠	٠
ص	٠	٢٠	٢٠

$$١٠ = \frac{٠ \times ل + ٢٠ \times ل + ٢٠ \times ل + ٠ \times ل}{ل٤} = س٢$$

$$١٠ = \frac{٢٠ \times ل + ٢٠ \times ل + ٠ \times ل + ٠ \times ل}{ل٤} = ص٢$$

∴ احداثى مركز الثقل = ( ١٠ ، ١٠ ) بالنسبة لنقطة ٢

ثانياً : عند رفع الكتلة عند الرأس د يكون :



عند ٢	عند ب	عند د
الكتلة	ل	ل
س	٠	٢٠
ص	٢٠	٠

$$س٢ = \frac{٠ \times ل + ٢٠ \times ل + ٠ \times ل}{ل٣} = \frac{٢٠}{٣}$$

$$ص٢ = \frac{٢٠ \times ل + ٠ \times ل + ٠ \times ل}{ل٣} = \frac{٢٠}{٣}$$

∴ احداثى مركز الثقل = (  $\frac{٢٠}{٣}$  ،  $\frac{٢٠}{٣}$  ) بالنسبة لنقطة ٢

**حل آخر لثانياً :**

مركز ثقل المجموعة المكونة من ٤ كتل عند كل رأس من رؤوس المربع يؤثر عند مركز المربع ( نقطة تقاطع القطرين ) و كتلته = ل٤ و الكتلة التى رفعت من الرأس د = ل

## الاختبار الرابع

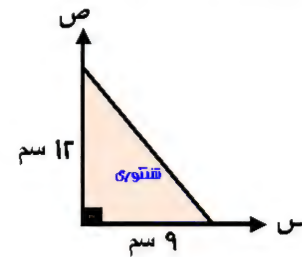
**السؤال الأول :** أختار الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل

المقابل هو ....

(٢) (٤ ، ٣) (ب) (٤ ، ٣)

(د) (٨ ، ٦) (٤) (٦ ، ٨)



**الحل**

من الشكل تكون احداثيات رؤوس الصفيحة هي :

(٠ ، ٠) ، (٠ ، ٩) ، (١٢ ، ٠) ∴ الصفيحة مثلثة الشكل

∴ مركز ثقل الصفيحة يقع عند نقطة تلاقى المتوسطات

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{١٢ + ٠ + ٠}{٣} , \frac{٠ + ٩ + ٠}{٣} \right) = (٤ , ٣)$$

**السؤال الرابع :**

(٢) ٢ ب د ٤ مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، وضعت كتل متساوية المقدار

عند رؤوسه ، أولاً : عين مركز ثقل المجموعة

ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه " و ليكن د "

فأين يقع مركز المجموعة المتبقية

**الحل**

أولاً : ∴ الصفيحة رقيقة منتظمة مربعة الشكل

∴ مركز الثقل يؤثر عند مركز المربع

( نقطة تقاطع القطرين )

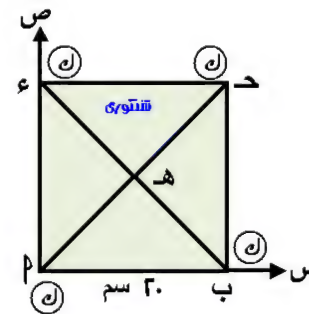
أى عند نقطة هـ ( ١٠ ، ١٠ )

**حل آخر**

باختيار الاتجاهين المتعامدين  $\vec{س}$  ،  $\vec{ص}$  كما

بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ٢ نقطة الأصل

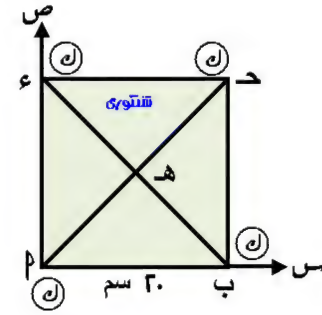
و بفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ل





و يكون جدول الكتل و الاحداثيات كما يلى :

الكتل	هـ	ح
س	١٠	٢٠
ص	١٠	٢٠



$$\therefore \text{سم} = \frac{0 \times 10 - 10 \times 20}{10 - 20} = \frac{20}{3}$$

$$\text{صم} = \frac{0 \times 10 - 10 \times 20}{10 - 20} = \frac{20}{3}$$

$\therefore$  مركز ثقل المجموعة المتبقية هو :  $(\frac{20}{3}, \frac{20}{3})$  بالنسبة لنقطة م

### السؤال الخامس :

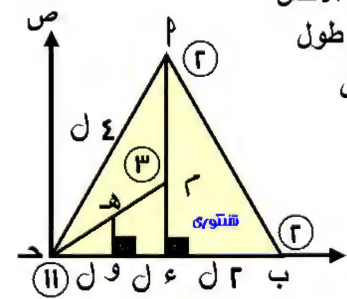
- (١) م ب ح صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، مركز ثقلها ، وُضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس م ، ب ، ح على الترتيب ، برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م ح

### الحل

نختار اتجاهين متعامدين حـ سـ ، حـ صـ كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة ح نقطة الأصل ، بفرض أن : طول ضلع الصفيحة = ٤ ل وحدة طول  $\therefore$  م ب = ٤ ل حـ ا ٦٠° = ٢ ل ٣ صـ وحدة طول

$$\text{م} = \frac{1}{3} \text{ م ب} = \frac{1}{3} \times 4\text{ل} = \frac{4}{3}\text{ل} \text{ وحدة طول}$$

$$\text{هـ و} = \frac{1}{3} \text{ م ب} = \frac{1}{3} \times 4\text{ل} = \frac{4}{3}\text{ل} \text{ وحدة طول}$$



و يكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	م	ب	ح	ص
س	٢	٢	١١	٣
ص	٢	٢	١١	٣

$$\therefore \text{سم} = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2 + 11 \times 0 + 3 \times 0}{2 + 2 + 11 + 3} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\text{صم} = \frac{2 \times 2 + 2 \times 2 + 11 \times 0 + 3 \times 0}{2 + 2 + 11 + 3} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

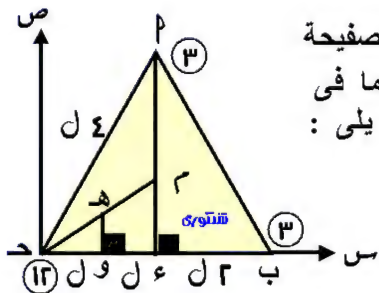
$\therefore$  احداثى مركز ثقل المجموعة =  $(\frac{4}{9}, \frac{4}{9})$  بالنسبة للنقطة ح

$\therefore$  احداثى نقطة هـ =  $(\frac{4}{9}, \frac{4}{9})$

$\therefore$  احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م ح

### حل آخر

بتوزيع كتلة الصفيحة ( ٣ كجم ) على رؤوس الصفيحة و اختيار الاتجاهين المتعامدين و ايجاد الأطوال كما فى الحل السابق يصبح جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



الكتلة	م	ب	ح
س	٣	٣	١٢
ص	٣	٣	١٢

$$\therefore \text{سم} = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3 + 12 \times 0}{3 + 3 + 12} = \frac{18}{18} = 1$$

$$\text{صم} = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3 + 12 \times 0}{3 + 3 + 12} = \frac{18}{18} = 1$$

## الاختبار الخامس

**السؤال الأول :** اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة  
 (٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقا حراً على الخط المستقيم الرأسى المار ب ....

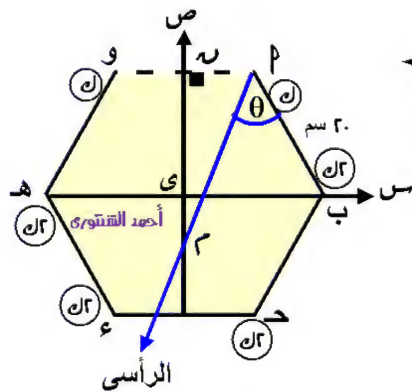
الحلـ

يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقا حراً على الخط المستقيم الرأسى المار ب نقطة التعليق

## السؤال الرابع :

(٢) سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم م ب د هـ و بدأ من نقطة م ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، وإذا علق السلك تعليقا حراً من طرفه م عين قياس زاوية ميل م ب على الرأسى فى وضع التوازن

الحلـ



طول كل ضلع =  $20 = 100 \div 5$  سم  
 بأخذ الاتجاهين المتعامدين ي س ، ي ص  
 حيث ي " مركز المسدس " نقطة الأصل  
 وبفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = ٢ ل  
 و تؤثر فى منتصف كل منها  
 و توزع عند كل رأس  
 فتكون الكتل كما بالشكل المقابل  
 ، و تكون الكتل و احداثياتها  
 كما بالجدول التالى :

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة =  $(ل , \frac{1}{3} \sqrt{3} ل)$  بالنسبة للنقطة د

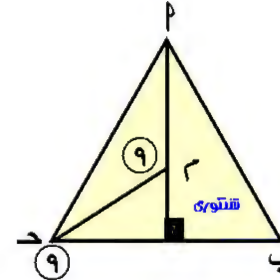
، ∴ احداثى نقطة هـ =  $(ل , \frac{1}{3} \sqrt{3} ل)$

∴ احداثى مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م د

## حل ثالث

بتجميع الكتل الثلاث (٢ كجم) عند رؤوس الصفيحة إلى مركز ثقل الصفيحة فيصبح (٩ كجم) عند م ،  
 (٩ كجم) عند د

فيكون : مركز ثقل المجموعة عند منتصف م د



، و يؤثر عند نقطة تبعد نقطة  $\nu$

حيث :  $y = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2. = 1. = \sqrt{1.} = 1.$  سم

**فتكون الكتل و احداثياتها كما بالجدول التالي :**

$$\text{الكتلة} = \frac{\text{ك} - \text{ك}}{\text{ك} - \text{ك}} = \text{صفر} \therefore \text{سليم}$$

$$\overline{3} \sqrt{2} = \frac{\overline{3} \sqrt{1. \times 10^{-6}}}{10^{-6}} = \text{صم} ,$$

∴ مركز الثقل = ( ٠ ، - ٢√٣ ) بالنسبة لنقطة O

عند م	عند ب	عند د	عند ء	عند هـ	عند و
ل	ل ٢	ل ٢	ل ٢	ل ٢	ل
١٠	٢٠	١٠	١٠	٢٠	١٠ -
$\sqrt[3]{١٠}$	.	$\sqrt[3]{١٠} -$	$\sqrt[3]{١٠} -$	.	$\sqrt[3]{١٠}$

$$= \frac{1 \times 1 - 2 \times 12 - 1 \times 12 - 1 \times 12 + 2 \times 12 + 1 \times 1}{1 + 12 + 12 + 12 + 12 + 1} = \frac{-11}{49} = -\frac{11}{49}$$

$$\overline{P}_{\text{تر}} = \frac{\overline{P}_{\text{ت1}} \times \text{ج1} + \overline{P}_{\text{ت2}} \times \text{ج2} + \overline{P}_{\text{ت3}} \times \text{ج3} + \overline{P}_{\text{ت4}} \times \text{ج4}}{\text{ج1} + \text{ج2} + \text{ج3} + \text{ج4}} = \text{معدل}$$

∴ مركز الثقل هو ( . ، - 2√3 ) بالنسبة لنقطة ي ، ∴ ي ( . ، . )

∴ مركز ثقل السسك يبعد  $\sqrt{3}$  عن مركز المسدس عند التعليق من  $P$

و يكون  $\vec{r}$  هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق  $P$

من الرسم نجد :  $\frac{\sqrt[3]{17}}{0} = \frac{\sqrt[3]{12}}{1} = (\Delta \sim P2)$

∴  $\angle (P, Q) = 18^\circ 62'$  ، ∴ قياس زاوية رأس المسدس =  $120^\circ$

$$^{\circ}00' \Sigma \Gamma = ^{\circ}72' 18 - ^{\circ}12 = ( \theta \geq ) \cup \therefore$$

**حل آخر " لايجاد مركز الثقل "**

∴ المسدس منتظم ∴ أطوال أضلاعه متساوية و تتناسب مع كتلتها

∴ طول السلك = 1.0 سم ∴ طول كل ضلع = 0 ÷ 1.0 = 0.33 سم

∴ طول الضلع السادس ( ٤٦ ) سم ،

مجموع أطوال أضلاع المسدس = ١٢٠ سم

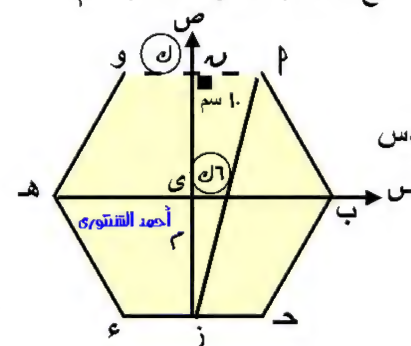
∴ طول ( e p ) : مجموع أطوال أضلاع المسدس

$$7 : 1 = 15. : 2. =$$

، بفرض أن : كتلة أضلاع المسدس = 6 ل

، ويؤثر عند نقطة ي

، كتلة طول  $(p, e) = \mathcal{L}$





## اجابات اختبارات الاستاتيكا الاختبار الأول

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة


- (١) إذا كانت  $\theta$  هي قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل فإن : معامل الاحتكاك السكونى يساوى ....  
(٢) طا  $\theta$  (ب) حا  $\theta$  (د) حتا  $\theta$  (٤) طتا  $\theta$

الحل

$\therefore \theta$  قياس الزاوية بين قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل المحصل

$\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك  $= 90^\circ - \theta$

$\therefore \mu_s = \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$

- (٢) الشكل المقابل يمثل قضيب فى حالة اتزان فإن :  $\mu = \dots$
- 

- (٢) ٢٨ نيوتن (ب) ١٦ نيوتن (د) ٢ نيوتن (٤) ٤ نيوتن

الحل

$\therefore$  القضيب متزن

$\therefore$  مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نقطو تأثير الحامل = صفر

$\therefore 20 \times 24 - 12 \times 24 - 2 \times 24 = 0$

و منها :  $\mu = 16$  نيوتن

- (٣) إذا كانت القوة  $\vec{F} = 3\vec{i} - 0\vec{j}$  تؤثر فى النقطة  $(1, 1)$  فإن : عزم القوة  $\vec{M}$  بالنسبة لنقطة الأصل يساوى ....

- (٢)  $\vec{F} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$  (ب)  $\vec{F} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$  (د)  $\vec{F} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$  (٤)  $\vec{F} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$

الحل

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = (1\vec{i} + 1\vec{j}) \times (2\vec{i} - 8\vec{j}) = 10\vec{k}$$

- (٤) قوتان تكونان ازدواج ، مقدار احدهما ١٥ نيوتن و عزم الازدواج المحصل منهما ٤٥ نيوتن . سم فإن :  
البعد العمودى بينهما يساوى ....  
(٢) ٦٧٥ سم (ب) ٦٠ سم (د) ٣ سم (٤) ٣٠ سم

الحل

يفرض أن :

البعد العمودى بين القوتين =  $L$  سم

$\therefore$  القوتان تكونان ازدواجاً

$\therefore 10 = 15$  نيوتن

$\therefore$  عزم الازدواج المحصل = ٤٥ نيوتن . سم

$\therefore 45 = 10 \times L$  ومنها :  $L = 3$  سم

- (٥) إذا اتزنت مجموعة من القوى المستوية فإن مجموع عزومها

حول أى نقطة فى المستوى يساوى ....

- (٢) ثابت غير صفري (ب) صفر  
(د) محصلة هذه القوى (٤) الواحد الصحيح

الحل

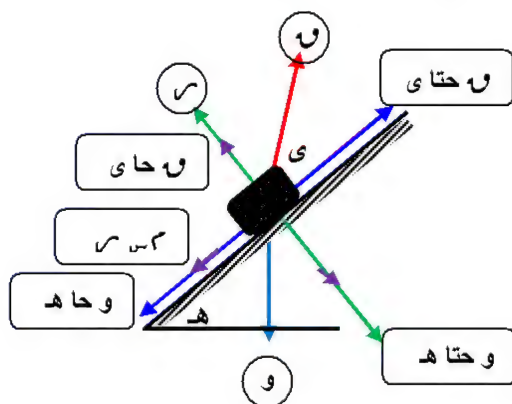
صفر

- (٦) مركز ثقل جسمين ماديين كتل كل منهما ٣ نيوتن ، ٦ نيوتن و المسافة بينهما ١٥ سم يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة .... سم

- (٢) ٥ (ب) ١٠ (د) ٧,٥ (٤) ٩

(٢) وضع جسم وزنه ( و ) على مستوى خشن يميل على الأفقى  
بزواوية قياسها ( هـ ) فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك هو ( ل )  
فأوجد مقدار و اتجاه القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة  
لأعلى



نفرض أن :  $\angle$  تميل على  
المستوى بزاوية قياسها  $\theta$   
∴ قياس زاوية الاحتكاك  $= \theta$

$$\frac{\text{حال}}{\text{حقال}} = \text{طا ل} = \therefore \text{مس}$$

$$\frac{\text{مر حال}}{\text{مقال}} = \text{ع} = \text{مر} = \text{مر حال}$$

، ∴ الجسم على وشك الحركة  
∴ معادلتا الانزان هما :

و. حتی = و. حاه + م. م

$$= \text{و حاه} + \frac{\text{مر حال}}{\text{حتال}} \text{ بالضرب } \times \text{حتال ينتج} :$$

(1)  $و، حتای حتال = و चाह حتال + مر حال$

،  $مر + و$  حای = و حتاه

$$\therefore \text{ری} = \text{و حقاہ} - \text{و حای}$$

بالتعويض من (١) ينتج :

ق. حتای حتال = و चाह حتال + ( و حتاه - ق. حای ) × حال

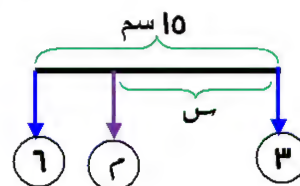
∴ ق حتای حتال = و चाह حتال + و حتاه حال - ق حای حال

∴ م. حتای حتال + م. حای حال = و. حاه حتال + و. حتاه حال

∴ و حقا ( ل - ی ) = و ( ل + هـ )

$$\frac{(و + هـ)}{(ح - ي)} = ٧ \therefore$$

و يكون مقدار  $\frac{1}{n}$  أقل ما يمكن عندما يكون  $(y - l)$  أكبر ما يمكن



بفرض أن :

مركز الثقل يبعد عن الجسم ٣ نيوتن مسافة = ٥ سم

$$\therefore 3s = 7 \times (10 - s)$$

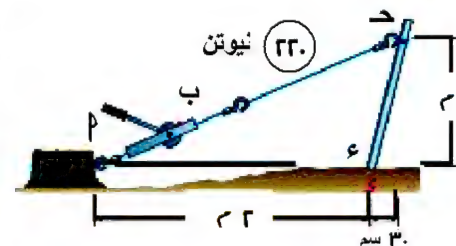
$$\therefore 3 \text{ س} = 90 - 6 \text{ س}$$

و منها : س = ا. سم

**السؤال الثاني :**

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلي :

(١) الشكل المقابل :



یوضح شداد م ب یوثر علی

عمود مائل ح ۷

**أوجد معيار عزم قوة الشد**

بالنسبة للنقطة ع

نرسم  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$  ،  $\overline{CD} \perp \overline{AB}$

∴ من  $\Delta P$  حى القائم الزاوية فى  $\gamma$

$$r(p \vee q) + r(p \wedge q) = r(p) \therefore$$

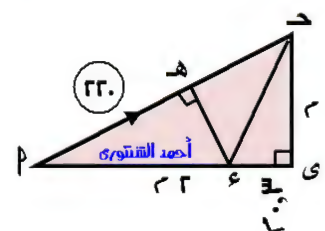
$$7,29 = {}^r(2,3) + {}^r(1) =$$

$\therefore 398V = P \text{ ح } , 220.798 = P \text{ ح } \therefore$

∴ من  $\triangle p$  هـ القائم الزاوية في هـ :

$$٧٩٧٤ = ٣٩٨٧ \times ٢ = \text{ح} \times \text{ع} = \text{ه}$$

$$\therefore E = 22. \times .7974 = 17.5 \text{ نيوتن} . \text{ م}$$



مقدار المحصلة :

$$\frac{1}{5} 20 = \frac{1}{5} 10 + \frac{1}{5} 10 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

اتجاه المحصلة :

نفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة  $h \in \overline{M}$

$$-b \times 10 = -p \times 1. \therefore$$

$$(\Delta P - V_0) \times 10 = \Delta P \times 1. \therefore$$

$$Rp\ 10 - 1150 = Rp\ 1. \therefore$$

$$1120 = 2^4 \cdot 70 \therefore$$

$$\therefore p = 20 \text{ سم}$$

أى أن : مقدار المحصلة يساوى ٢٥ نيوتن و يعمل اتجاهها فى نفس اتجاه

القوتين و تؤثر في نقطة تبعد عن ٢ بمقدار ٤٥ سم

(۲) ب د مثلث متساوی الساقین فیہ  $\angle ب = \angle د = ۱۳$  سم

ب د = ١٠ سم ، اثرت القوى ٦٥ ، ٧٠ ، ٦٥ نيوتن في  $\vec{p}_B$  ،  $\vec{p}_D$  ،  $\vec{p}_C$  على الترتيب ، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج فما قيمة ٧٠ ، و معيار عزم الازدواج



∴ القوى تؤثر في أضلاع مثلث و مأخوذة في ترتيب دوري واحد ، و تكافئ ازدواجاً

$$\therefore m = \text{مقدار القوة الممثل لوحدة الأطوال} = \frac{65}{13}$$

$$0 =$$

$$0 = \frac{v}{1} \therefore$$

، هندسة الشكل :  $p = 12$  سم ( فيثاغورث )

، معيار عزم الازدواج =  $m(\Delta \mid b \mid c) \times m$

$$2 \times 1 \text{ حـ} \times 1 \text{ حـ} \times 1 \text{ بـ} \times \frac{1}{2} \times 2 =$$

$$2 \times \frac{1}{2} \text{ حقا } \frac{1}{2} \text{ حا } 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 =$$

أحمد التنتوي

أى عندما :  $(y - d) = 1$

$$\therefore y - D = 0 \quad \text{أي : } y = D$$

∴ مقدار القوة =  $(\text{هـ} + \text{ل})$  و خط عملها يصنع مع المستوى زاوية قياسها = قياس زاوية الاحتكاك

### حل آخر

## لايجاد مقدار القوة

من الشكل المقابل باستخدام قاعدة لامى ينتج :

$$= \frac{v}{[(d + h) - 180] \text{ حـ}}$$

$$= \frac{9}{[ (1 - 0.9) - 0 ]}$$

✓  
[ ( ٩٠ + ٥ ) ]

$$\frac{و}{(ح - و)} = \frac{و}{(و + ح)} \therefore$$

$$\frac{و(هـ + د)}{حتا(د - و)} = ٧ \therefore$$

### السؤال الثالث :

(1) قوتان متوازيتان و في نفس الاتجاه مقدارهما 10 ، 1 نيوتن تؤثران

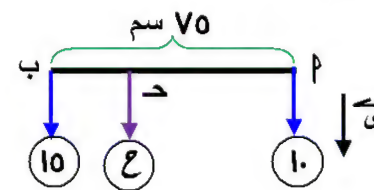
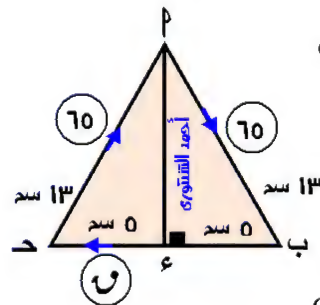
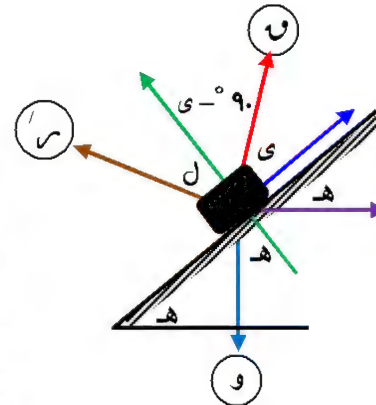
في النقطتين  $\mu$  ،  $\beta$  يؤثر حيث  $\mu = \beta = V_0$  سم

## أوجد محصلة القوتين

نفرض  $\vec{u}$  متجه وحدة في اتجاه القوتين

$$\frac{1}{5} 10 = \frac{1}{5} \quad , \quad \frac{1}{5} 1. = \frac{1}{5} \therefore$$

أحمد التنتوي





$$\therefore \frac{2}{3} \text{ شـم} + \frac{1}{4} \text{ شـم} = 10 \quad \therefore 2 \text{ شـم} = 10$$

$$\therefore \text{شـم} = 5 \text{ وحدة وزن}$$

، بالتعويض فى (١) ينتج : شـم =  $\sqrt{3}$  ٥ وحدة وزن ،  
بفرض أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$  ،  
جـ = .

$$\therefore \text{شـم} \text{ حـا } 60^\circ \times 2 \text{ ل حـا } \theta - \text{شـم} \text{ حـا } 60^\circ \times 2 \text{ ل حـا } \theta$$

$$- 2 \times \left( \frac{1}{4} \text{ ل} + \frac{1}{4} \text{ ل} \right) \text{ حـا } \theta - 8 \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta = .$$

$$\therefore \sqrt{3} ٥ \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta - \sqrt{3} ٥ \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta - 2 \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta = .$$

$$- 2 \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta - 8 \times \frac{1}{4} \text{ ل حـا } \theta = .$$

، بالقسمة  $\div$  ل حـا  $\theta$  ينتج :

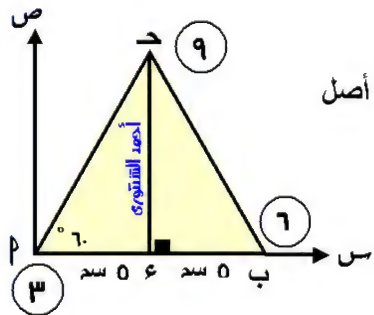
$$. = \frac{32}{4} - \frac{18}{4} - \theta \quad \therefore 10 - \sqrt{3} ٥ - 10 = \theta$$

$$\therefore \sqrt{3} ٥ = \theta \quad \therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = \theta \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

أحمد الشنتوي

(٢) بـ د مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سم ، اثرت الأوزان  
٣ ، ٦ ، ٩ نيوتن فى رؤوسه ، عين موضع مركز ثقل المجموعة

الحلـ



نختار اتجاهين متعامدين  $\vec{P}$  سـ ،  $\vec{P}$  صـ  
كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة  $P$  نقطة أصل  
و من هندسة الشكل نجد :

$$\text{دـ} = ١٠ \text{ حـا } 60^\circ = \sqrt{3} ٥ \text{ سم}$$

فيكون :  $P (0,0)$  ،  $B (10,0)$  ،

$$D (5, \sqrt{3} ٥)$$

و نكون جدول الأوزان واحداثياتها كما يلى :

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} \times 2 \times 13 \times 13 \times \frac{1}{4} \times 2 = 0$$

$$= 60 \text{ نيوتن . سم}$$

السؤال الرابع :

(١) ب قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستوى رأسى من

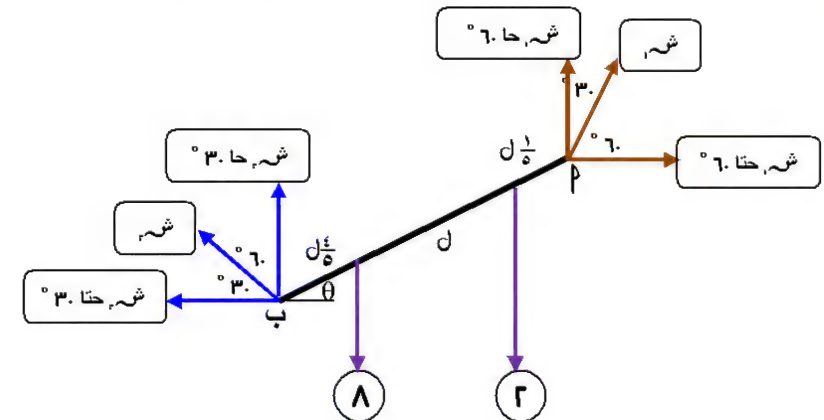
طرفيه  $P$  ، ب يميلان على الرأسى بزاويتين  $30^\circ$  ،  $60^\circ$  على

الترتيب ، علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بعد من

$P$  يساوى  $\frac{1}{4} \text{ ل}$  ،  $\frac{1}{4} \text{ ل}$  أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد

فى الخيطين و قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى

الحلـ



$\therefore$  القضيب متزن

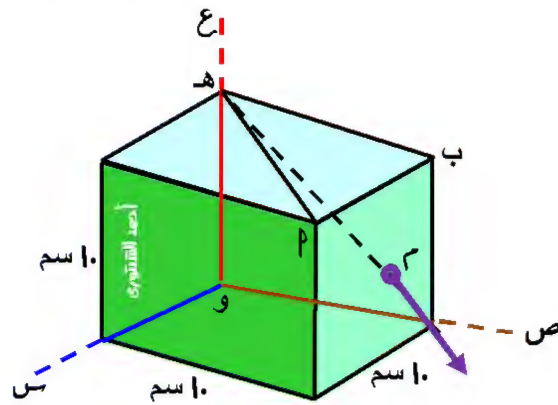
$$\text{شـم} \text{ حـا } 60^\circ = \text{شـم} \text{ حـا } 30^\circ$$

$$\therefore \text{شـم} \times \frac{1}{4} = \text{شـم} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$، \text{شـم} \text{ حـا } 60^\circ + \text{شـم} \text{ حـا } 30^\circ = 8 + 2$$

$$\therefore \text{شـم} \times \frac{\sqrt{3}}{4} + \text{شـم} \times \frac{1}{4} = 10$$

بالتعويض من (١) ينتج :



## السؤال الخامس :

(1) فى الشكل المقابل :

قوة  $\vec{r}$  نيوتنتؤثر فى  $\vec{H}$ أوجد مركبات عزم القوة  
بالنسبة لمحاور الاحداثيات

الحل :

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{H} = (10, 0, 0) \text{ م} , \vec{r} = (0, 10, 0) \text{ م}$$

$$\therefore \vec{H} - \vec{r} = \vec{H} - \vec{r} = (10, -10, 0)$$

$$\therefore \|\vec{H} - \vec{r}\| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{H} - \vec{r}}{\|\vec{H} - \vec{r}\|} = \frac{(10, -10, 0)}{10\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{r} = (3, 6, 0) \text{ م} , \vec{H} = (10, 0, 0) \text{ م}$$

$$\vec{r} \times \vec{H} = (3, 6, 0) \times (10, 0, 0) = (0, 60, -30)$$

$$\therefore \vec{H} \times \vec{r} = (0, -60, 30)$$

$$\therefore \vec{H} \times \vec{r} = (0, -60, 30) \text{ م} \cdot \text{م}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 10 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_x(0 \cdot 0 - 0 \cdot 6) - \vec{e}_y(0 \cdot 0 - 30) + \vec{e}_z(60 - 0) = 30\vec{e}_y + 60\vec{e}_z$$

$\therefore$  مركبة عزم  $\vec{u}$  بالنسبة لمحور السينات =  $0$

مركبة عزم  $\vec{u}$  بالنسبة لمحور الصادات =  $30$

مركبة عزم  $\vec{u}$  بالنسبة لمحور السينات = صفر

ح	ب	پ	و
٩	٦	٣	٥
٥	١٠	٠	٠
٣٠	٠	٠	٠

$$\therefore \text{سم} \frac{30}{9+6+3} = \frac{0 \times 9 + 10 \times 6 + 0 \times 3}{9+6+3} = \text{سم} \frac{60}{18} = \text{سم} \frac{10}{3}$$

$$\text{سم} \frac{30}{9+6+3} = \frac{30 \times 9 + 0 \times 6 + 0 \times 3}{9+6+3} = \text{سم} \frac{270}{18} = \text{سم} 15$$

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{10}{3}, 15, 0 \right) \text{ بالنسبة للنقطة } P$$

## ملاحظات :

[1] لا يتغير مركز الثقل للنظام بتغير مواضع المحاور المتعامدة  
حيث لا يتغير البعد بين موضع مركز الثقل و كل من موضع الأوزان  
بتغير مواضع المحاور المتعامدة  
ففى الحل السابق نجد :

$$P = \sqrt{\left(0 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(0 - 15\right)^2} = \sqrt{25 + 225} = \sqrt{250} = 15.81 \text{ سم}$$

$$\text{بالمثل } P = 36.11 = 19.44 \text{ سم} , \text{ ح } = 19.44 \text{ سم}$$

$$[2] \text{ إذا اعتبرنا } P(3, 6, 0) , \text{ ب } (0, 0, 0) , \text{ ح } (0, 10, 0)$$

$$\text{فإن : احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{10}{3}, 15, 0 \right) \text{ بالنسبة للنقطة } P$$

$$\text{و يكون : } P = 15.81 \text{ سم} , \text{ ب } = 36.11 \text{ سم} , \text{ ح } = 19.44 \text{ سم}$$

$$[3] \text{ إذا اعتبرنا } P(3, 6, 0) , \text{ ب } (0, 0, 0) , \text{ ح } (0, 10, 0)$$

$$\text{فإن : احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{10}{3}, 15, 0 \right) \text{ بالنسبة للنقطة } P$$

$$\text{و يكون : } P = 15.81 \text{ سم} , \text{ ب } = 36.11 \text{ سم} , \text{ ح } = 19.44 \text{ سم}$$

$$\begin{aligned} \frac{4.7}{7.7} &= \frac{\frac{7}{3} \times 7 + \frac{21}{3} \times 0}{7 + 0} = \text{سم} \\ \frac{100}{7.7} &= \frac{\frac{5}{3} \times 7 + \frac{5}{3} \times 0}{7 + 0} = \text{سم} \\ \therefore \text{احداثى مركز الثقل} &= \left( \frac{100}{7.7}, \frac{4.7}{7.7} \right) \end{aligned}$$

## الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(1) يؤثر على الجسم ازدواجان الأول مقدار احدى قوتيهِ ٢٠ ث كجم و

ذراع العزم  $\frac{1}{3}$  متر و اتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

و الثانى مقدار احدى قوتيهِ ٣٠ ث كجم وذراع العزم ١ متر و اتجاه

دورانه فى اتجاه دوران الساعة

فإن : الازدواج المحصل يساوى ....

(أ) ٢٠ ث كجم . م واتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(ب) ٢٠ ث كجم . م واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

(ج) ٤٠ ث كجم . م واتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

(د) ٤٠ ث كجم . م واتجاه دورانه فى عكس اتجاه دوران الساعة

الحل

$$\text{الازدواج المحصل} = 20 \times \frac{1}{3} - 30 \times 1 = - 20 \text{ ث كجم . م}$$

$\therefore$  الازدواج المحصل = ٢٠ ث كجم . م واتجاه دورانه فى اتجاه دوران الساعة

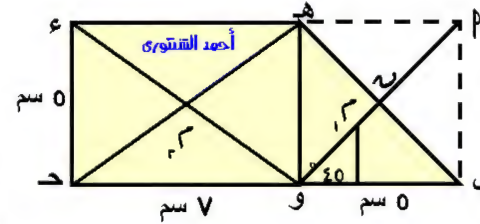
(٢) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل P ب د ع فيه :

P ب = ٥ سم ، ب د = ١٢ سم ، هـ  $\in$  P د بحيث P هـ = ٥ سم

ثنى المثلث P ب هـ حول الضلع ب هـ حتى أنطبق P ب على ب د

تماماً ، عين موضع مركز ثقل الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى :

د ب ، د ع



الحل

مساحة المربع P ب و هـ

مساحة المستطيل و د ع هـ

$\therefore$  الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

$\therefore$  المساحات تتناسب مع الكتل

بفرض أن كتلة المربع P ب و هـ = ٥ ك

$\therefore$  كتلة المستطيل و د ع هـ = ٧ ك

$\therefore$  الاتجاهين د ب ، د ع متعامدين

$\therefore$  كتلة المستطيل و د ع هـ تؤثر عند نقطة تلاقى قطريهِ م  $\left( \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$

، كتلة المربع P ب و هـ فى الوضع الجديد تؤثر عند تلاقى متوسطات  $\Delta$  و ب هـ

من هندسة الشكل نجد : و هـ =  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} \times 5 = 2.5$

$\therefore$  و م =  $\frac{5}{2}$  و هـ =  $\frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 2.5$

$\therefore$  م =  $\left( \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right) = (2.5, 3.5)$  حـا  $20 \times \frac{5}{2} = 50$

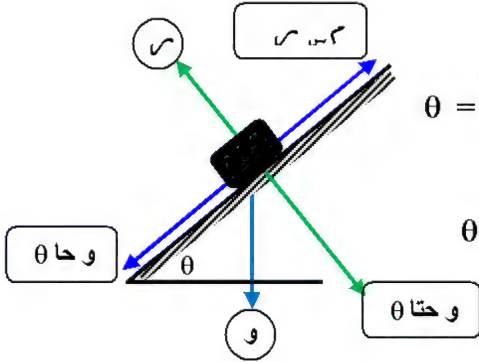
و يكون جدول الاحداثيات كما يلى :

المربع P ب و هـ	المستطيل و د ع هـ	
٥ ك	٧ ك	الكتلة
$\frac{21}{3}$	$\frac{7}{2}$	س
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	ص





(٢) برهن أن : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان الجسم على وشك الانزلاق فإن : قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى



الحل  
بفرض أن : قياس زاوية الاحتكاك =  $\theta$   
، قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى =  $\theta$   
∴ الجسم على وشك الانزلاق  
∴ معادلتا الاتزان هما :

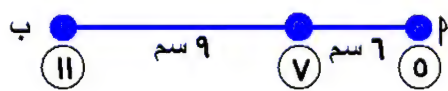
$$N \cos \theta = W \sin \theta \quad \text{و} \quad f = W \cos \theta$$

$$\therefore N = W \tan \theta$$

$$\text{و} \quad \text{طال} = \theta \quad \therefore \quad \theta = \theta$$

و منها :  $\theta = \theta$  طال  $\therefore \theta = \theta$   
أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

السؤال الثالث :

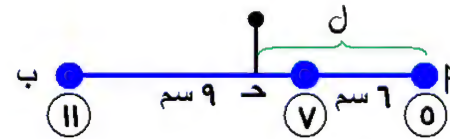


(١) وضعت ثلاثة اجسام

أوزانها ١١ ، ٧ ، ٥ ث كجم

على قضيب خفيف كما بالشكل

عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً



نفرض أن : القضيب يعلق من نقطة د

التي تبعد عن م مسافة = ل وحدة طول

$$\therefore \text{ع} = \text{د}$$

$$\therefore \text{د} = (11 - 10) \times 11 + (7 - \text{د}) \times 7$$

$$\therefore 9 - \text{د} = 11 - 10 + 7 - \text{د} \quad \therefore \text{د} = 9$$

أى أن : القضيب يعلق من نقطة على بعد ٩ وحدة طول من نقطة م

$$(P) (9, 17) \quad (B) \left(\frac{3}{4}, \frac{17}{12}\right)$$

$$(C) (13, 19) \quad (E) \left(\frac{1}{4}, \frac{12}{13}\right)$$

الحل

$$\therefore \text{سم} = \frac{1 \times 17 + 2 \times 0}{17 + 0} = \frac{17}{17} = 1$$

$$\text{ص} = \frac{1 \times 17 + (1-1) \times 0}{17 + 0} = \frac{17}{17} = 1$$

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left(\frac{3}{4}, \frac{17}{12}\right)$$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :  
السؤال الثانى :

(١) إذا كانت القوة  $\vec{O} = \vec{S} - \vec{V} + \vec{C}$  تؤثر فى النقطة

(-١ ، ٢ ، ١) أوجد :

أولاً : عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل

ثانياً : طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل  $\vec{O}$

الحل

$$\vec{O} = (-1, 2, 1) \quad , \quad (\vec{S}, \vec{V}, \vec{C}) = (3, -1, 0)$$

$$\vec{O} = \begin{vmatrix} \vec{S} & \vec{V} & \vec{C} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{C} - \vec{V} + \vec{S}$$

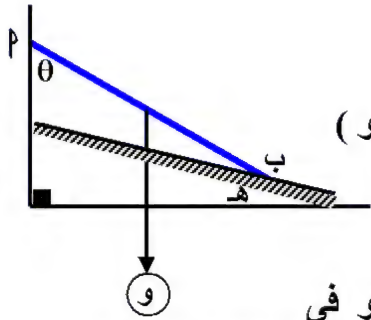
$$\therefore \|\vec{O}\| = \sqrt{194} \quad \therefore 194 = 81 + 64 + 49$$

$$\therefore \|\vec{O}\| = \sqrt{305} \quad \therefore 305 = 9 + 1 + 20$$

$$\text{طول العمود} = \frac{\|\vec{O}\|}{\|\vec{C}\|} = \frac{\sqrt{194}}{\sqrt{305}}$$

## السؤال الرابع :

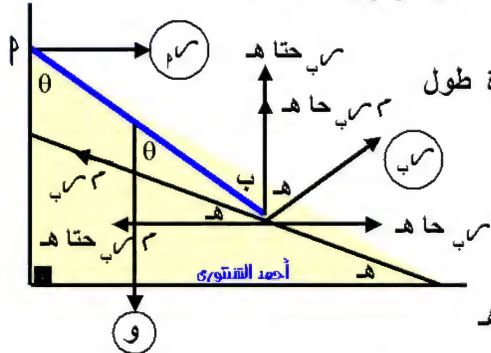
(١) فى الشكل المقابل :



ترتكز احدى نهايتى سلم منتظم وزنه ( و )  
على حائط رأسى أملس و ترتكز النهاية  
الأخرى على أرض خشنة تميل على  
الأفقى بزاوية قياسها ( هـ ) لأعلى

فإذا كان السلم على وشك الانزلاق و هو فى  
مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض  
اثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية قياسها  $\theta$  حيث :

طا  $\theta = 2$  طا ( ي - هـ ) حيث  $\theta$  زاوية الاحتكاك



نفرض أن : طول القضيب =  $l$  وحدة طول  
،  $\therefore$  قياس زاوية الاحتكاك =  $\theta$

$\therefore$   $\frac{\text{حاي}}{\text{حتاي}} = \tan \theta$

$\therefore$  السلم على وشك الانزلاق

$\therefore$  معادلات الاتزان هى :

$$\text{س} \times \text{حاي} = \text{و} \times \text{حتاي}$$

$$\therefore \text{س} \times \text{حاي} = \text{و} \times \text{حتاي} \quad \text{بالمضرب} \times \text{حتاي} \text{ ينتج :}$$

$$\text{س} \times \text{حاي} = \text{و} \times \text{حتاي}$$

$$\therefore \text{س} \times \text{حاي} = \text{و} \times \text{حتاي} \quad (1)$$

$$\text{و} = \text{س} \times \frac{\text{حاي}}{\text{حتاي}}$$

$$\therefore \text{و} = \text{س} \times \frac{\text{حاي}}{\text{حتاي}} \quad \text{بالمضرب} \times \text{حتاي} \text{ ينتج :}$$

$$\text{و} \times \text{حتاي} = \text{س} \times \text{حاي}$$

$$\therefore \text{و} \times \text{حتاي} = \text{س} \times \text{حاي} \quad (2)$$

(٢)  $AB$  مستطيل فيه  $AB = 6$  سم ،  $BC = 8$  سم ،

$H \in AB$  ،  $O \in AC$  بحيث  $BH = HO = OA = 2$  سم أثرت قوى

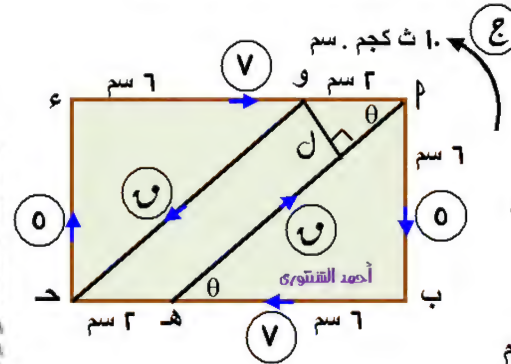
مقاديرها  $5$  ،  $5$  ،  $7$  ،  $7$  ،  $10$  ،  $10$  ث كجم فى اتجاهات  $\vec{AB}$  ،

$\vec{BC}$  ،  $\vec{CA}$  ،  $\vec{AB}$  ،  $\vec{BC}$  ،  $\vec{CA}$  ،  $\vec{AB}$  ،  $\vec{BC}$  ،  $\vec{CA}$  على الترتيب فإذا كانت

المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه  $10$  ث كجم . سم فى اتجاه

ح ب  $AB$  أوجد  $10$

الحل



القوتان  $(5, 5)$  تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه

$$J_1 = 5 \times 8 - 5 \times 6 = 10 \text{ ث كجم . سم}$$

القوتان  $(7, 7)$  تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه

$$J_2 = 7 \times 6 - 7 \times 8 = -14 \text{ ث كجم . سم}$$

القوتان  $(10, 10)$  تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$$J_3 = 10 \times 6 - 10 \times 8 = -20 \text{ ث كجم . سم}$$

من هندسة الشكل :  $l = AC = 10$  ح تا  $\theta = 36.87^\circ$

$$\therefore J_4 = 10 \times 10 \times \sin 36.87^\circ = 60 \text{ ث كجم . سم}$$

$\therefore$  المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه  $10$  ث كجم . سم

$$\therefore 10 = 60 - 20 - 14 = 6 \text{ ح تا } 36.87^\circ$$

$$\therefore 10 = 6 \text{ ح تا } 36.87^\circ$$

$$\therefore 10 = 6 \text{ ح تا } 36.87^\circ$$

ومنها :  $10 = 6 \text{ ح تا } 36.87^\circ$  ث كجم





عند فصل الكتلة ٣. عند نقطة ب  
نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

عند د	عند ع	عند م	عند س
٤٠	٧٠	١٠	٤٠
٠	١٠	١٠	١٠
٠	٠	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\therefore \text{سم} = \frac{1. \times ٤٠ + ١. \times ١٠ + ١. \times ٧٠ + ٠. \times ٤٠}{٤٠ + ١٠ + ٧٠ + ٤٠} = \frac{١٥}{٦}$$

$$\text{سم} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} \times ٤٠ + \frac{1}{3}\sqrt{3} \times ١٠ + ٠ \times ٧٠ + ٠ \times ٤٠}{٤٠ + ١٠ + ٧٠ + ٤٠} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{15}{6}, \frac{\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠})$  بالنسبة للنقطة د

حل آخر للجزء الثانى :

نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

الكتلة	٢١٠	٣٠ -
س	$\frac{٦٥}{٧}$	٢٠
ص	$\frac{\sqrt{3} \times ١٠}{٧}$	٠

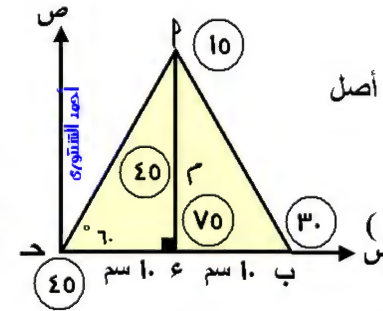
$$\therefore \text{سم} = \frac{٢٠ \times ٣٠ - \frac{٦٥}{٧} \times ٢١٠}{٣٠ - ٢١٠} = \frac{١٥}{٦}$$

$$\text{سم} = \frac{٠ \times ٣٠ - \frac{\sqrt{3} \times ١٠}{٧} \times ٢١٠}{٣٠ - ٢١٠} = \frac{\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{15}{6}, \frac{\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠})$  بالنسبة للنقطة د

(٢) ب د مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، م نقطة تقاطع متوسطاته ، ع نقطة منتصف ب د ، ثبت كتل مقاديرها ١٠ ، ٣٠ ، ٧٠ ، ٤٠ فى النقط م ، ب ، ع ، د ، س على الترتيب عين مركز ثقل هذه المجموعة ، وإذا رفعت الكتلة الموجودة عن ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية

الحل



نختار اتجاهين متعامدين  $\overrightarrow{DS}$  ،  $\overrightarrow{CS}$  كما بالشكل المقابل و ذلك باعتبار نقطة د نقطة أصل و من هندسة الشكل نجد :

$$\angle ٢٠ = ٦٠^\circ \text{ ح.ا } \therefore \overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

فيكون : د (٠، ٠) ، ع (٠، ١٠) ، ب (٠، ٢٠) ، م (١٠، ١٠) ، س (١٠، ١٠)

و نكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

عند د	عند ع	عند ب	عند م
٤٠	٧٠	٣٠	٤٠
٠	١٠	٢٠	١٠
٠	٠	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$$\therefore \text{سم} = \frac{١. \times ٤٠ + ١. \times ١٠ + ٢. \times ٣٠ + ١. \times ٧٠ + ٠. \times ٤٠}{٤٠ + ١٠ + ٣٠ + ٧٠ + ٤٠} = \frac{٦٥}{٧}$$

$$\text{سم} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} \times ٤٠ + \frac{1}{3}\sqrt{3} \times ١٠ + ٠ \times ٣٠ + ٠ \times ٧٠ + ٠ \times ٤٠}{٤٠ + ١٠ + ٣٠ + ٧٠ + ٤٠} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{15}{6}, \frac{\sqrt{3} \times ٥٠}{١٦٠})$  بالنسبة للنقطة د

## الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

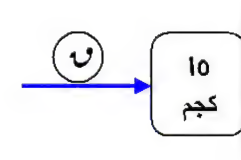
السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) مقدار أقل قوة أفقية  $\vec{v}$  لازمة لاتزان جسم

كتلته ١٥ كجم على حائط رأسى خشن

معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم

$\frac{1}{5}$  يساوى .... ث كجم



الحل

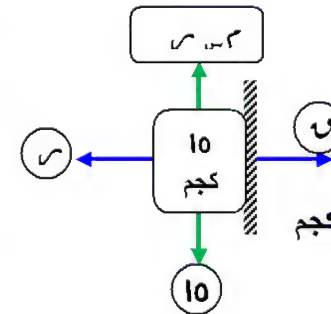
معادلنا الاتزان :

$$\vec{v} = \vec{r}$$

$$10 = \vec{r}$$

$$\therefore \frac{1}{5} \vec{r} = 10 \text{ ومنها : } \vec{r} = 50 \text{ ث كجم}$$

$$\therefore \vec{v} = 50 \text{ ث كجم}$$



(٢) قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر  $\vec{p}$  حيث  $p$  بـ حـ ع مربع طول ضلعه

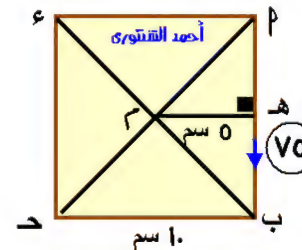
١٠ سم فإن : معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوى ....

الحل

من خواص المربع :

$$3 \text{ سم} = 0 \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{J} = 0 \times 70 = 0 \text{ نيوتن . سم}$$



(٣) إذا كانت :  $\vec{v} // \vec{r}$  ،  $\vec{v} = \vec{r} - \vec{r}$  ...

،  $\|\vec{v}\| = \|\vec{r}\| = 5 \text{ وحدة}$  فإن :  $\vec{v} = \dots$

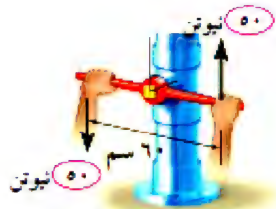
الحل

$$\therefore \vec{v} // \vec{r} \quad \therefore \vec{v} = \vec{r} = \vec{r} - \vec{r} = (0, 0)$$

$$\therefore \|\vec{v}\| = \|(0, 0)\| = 0$$

$$\therefore 5 = 0 \quad \therefore 5 = 0$$

$$\therefore 5 \pm 0 = \vec{v} \quad \therefore 5 \pm 0 = \vec{v}$$



(٤) فى الشكل المقابل :

عزم الازدواج الناتج من القوتين

٥٠ ، ٥٠ نيوتن يساوى ....

الحل

$$J = 50 \times 0.6 = 30 \text{ نيوتن . سم}$$

(٥) عندما يوضع قضيب داخل أناء كروى أملس فإنه يتزن عندما يمر

خط عمل الوزن ....

الحل

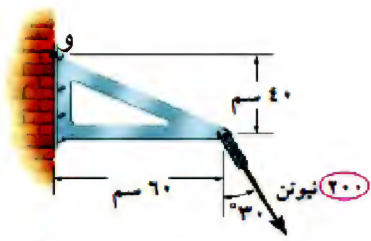
بمركز الأثناء ( الكرة )

(٦) مركز ثقل الصفيحة المنتظمة المثلثة الشكل يقع عند ....

الحل

نقطة تقاطع المتوسطات



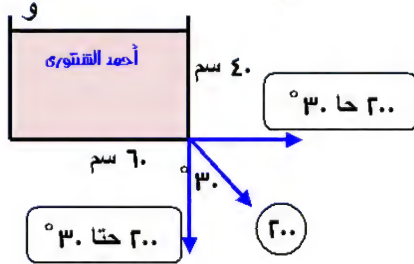


(٢) فى الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة ٢٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و

الحل

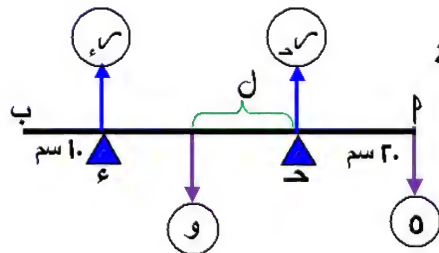
$$\begin{aligned} \text{ج} \quad 20 \times \sin 30^\circ &= 4 \times 6 \\ 20 \times \cos 30^\circ &= 6 \times 3 \\ 17.32 \text{ نيوتن} \cdot \text{سم} &= \end{aligned}$$



السؤال الثالث :

(١) ب قضيب غير منتظم طوله ١ متر يتركز فى وضع أفقى على

حاملين عند د ، حيث  $د = ٢٠$  سم ، ب  $ب = ١٠$  سم  
إذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من نقطة م أو من نقطة ب دون  
أن يختل توازن القضيب هو ٥ ، ٤ ث كجم على الترتيب  
أوجد وزن القضيب



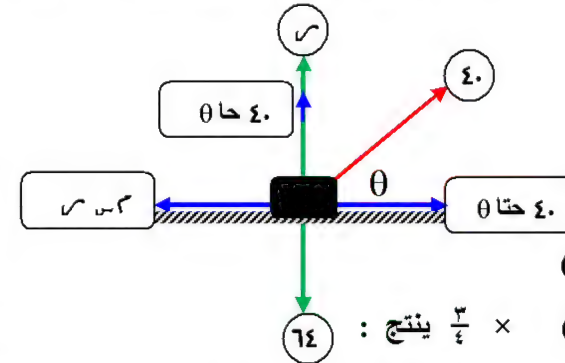
نفرض أن : وزن القضيب يؤثر عند نقطة  
تبعد عن د مسافة = ل سم  
عند تعليق ثقل ٥ كجم من م  
فإن القضيب يصبح على وشك الدوران  
حول د

$$\begin{aligned} \therefore \text{م} &= \text{م} \cdot \text{و} \quad \therefore \text{ج} = \cdot \\ \therefore ٥ \times ٢٠ - \text{و} \times \text{ل} &= \cdot \\ \therefore \text{و} \times \text{ل} &= ١٠ \quad (١) \end{aligned}$$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :  
السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ٦٤ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى  $\frac{3}{4}$  ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن و تميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$  ، فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة  $\theta$

الحل



∴ الجسم على وشك الحركة  
∴ معادلتا الأتزان هما :

$$\text{م} \cdot \text{ر} = ٤٠ \text{ حتا } \theta$$

$$\therefore \frac{3}{4} \cdot \text{م} = ٤٠ \text{ حتا } \theta \quad (١)$$

$$\text{م} \cdot \text{ر} + ٦٤ = ٤٠ \text{ حتا } \theta + ٦٤ \quad (٢)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \text{م} + ٤٨ = ٣٠ \text{ حتا } \theta + ٦٤$$

$$\frac{3}{4} \cdot \text{م} + ٤٨ = ٣٠ \text{ حتا } \theta + ٦٤$$

$$\therefore ٢٠ \text{ حتا } \theta = ٢٤ - ١٥ \text{ حتا } \theta$$

$$\therefore ٤٠ \text{ حتا } \theta = ٥٧٦ - ٧٢ \text{ حتا } \theta + ٢٢٥$$

$$\therefore ٤٠ (١ - \text{حتا } \theta) = ٥٧٦ - ٧٢ \text{ حتا } \theta + ٢٢٥$$

$$\therefore ٤٠ - ٤٠ \text{ حتا } \theta = ٥٧٦ - ٧٢ \text{ حتا } \theta + ٢٢٥$$

$$\therefore ١٧٦ = ٧٢ \text{ حتا } \theta - ٤٠ \text{ حتا } \theta$$

$$\therefore ١٢٥ - ٤٠ \text{ حتا } \theta = ٤٤ - ٥٠ \text{ حتا } \theta$$

$$\therefore \text{حتا } \theta = \frac{٤٤}{١٣٥} \quad \therefore \theta = ٢٠,٦١^\circ$$

$$\therefore \theta = ٥٣,١٣^\circ \quad (\text{ملاحظة : توجد حلول أخرى})$$



، كتلة الصفيحة المربعة  $ي$   $هـ$   $د$   $ع$   $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،  
و نكون الجدول التالي :

الكتلة	ل	ل	ل	ل
س	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$
ص	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$	$ل \frac{1}{4}$

$$\therefore س_م = \frac{ل \frac{1}{4} \times ل + ل \frac{1}{4} \times ل - ل \frac{1}{4} \times ل - ل \frac{1}{4} \times ل}{ل ٤} = ل \frac{1}{4} -$$

$$ص_م = \frac{ل \frac{1}{4} \times ل - ل \frac{1}{4} \times ل + ل \frac{1}{4} \times ل - ل \frac{1}{4} \times ل}{ل ٤} = صفر$$

$\therefore$  احداثي مركز الثقل  $= (ل \frac{1}{4} ، ٠)$  بالنسبة لمركز الصفيحة

**حل آخر :**

يمكن اعتبار الصفيحة مكون من ٣ أجزاء

الصفيحة المثلثة و هي المكونة من طبقتين و كتلتها  $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،

الصفيحة المثلثة  $ل$  و هي المكونة من طبقتين و كتلتها  $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،

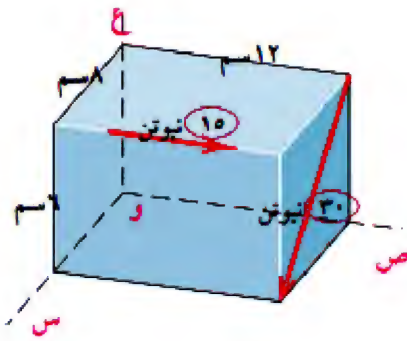
الصفيحة المستطيلة و  $د$   $هـ$   $ل$   $= ٢$  ، و كتلتها  $= ٢ ل$  ، و مركزها  $(٠ ، ل \frac{1}{4})$

**السؤال الخامس :**

(١) في الشكل المقابل :

اوجد مجموع عزوم القوى  
بالنسبة للنقطة و

**الحل**



أحمد الشنتوري

بالقسمة على  $ل$  حتى  $٣٠^\circ$  ينتج :  $ل \frac{1}{4} = ل \frac{1}{4} + ل \frac{1}{4}$

$\therefore س_م = ل \frac{1}{4}$  و بالتعويض من (٢) ينتج :

$س_م + ل \frac{1}{4} = ل$  و منها :  $س_م = ل \frac{3}{4}$  و

، بالتعويض من (١) ينتج :  $ش_هـ = ل \frac{3}{4}$  و

(٢) صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه  $ل$  فإذا كان  $هـ$  ،

$و$  ،  $هـ$  منتصفات  $م ب$  ،  $م ع$  ،  $ب د$  على الترتيب ، ثنى المثلث

$م$  و حول الضلع  $هـ$  و بحيث انطبقت  $م$  على مركز المربع  $ي$

و ثنى المثلث  $ب هـ$  و على الضلع  $هـ$  و بحيث انطبق الرأس  $ب$

على مركز المربع  $ي$  ، عين مركز ثقل الصفيحة في وضعها الجديد

**الحل**

نأخذ الاتجاهين المتعامدين  $ي هـ$  ،  $ي و$

$\therefore$  الصفيحة رقيقة منتظمة

$\therefore$  يمكن اعتبارها مكونة من ٤ أجزاء كما بالشكل

من هندسة الشكل :

$$ي_٢ = ل \frac{2}{3} = س_٢ = ل \frac{2}{3} \times ل \frac{1}{3} = ل \frac{2}{9}$$

$$ل \frac{2}{9} = ل \frac{2}{9} \times ل \frac{1}{3} = ل \frac{2}{27}$$

$$\therefore س_٢ = ل \frac{2}{9} \text{ ل } ٤٥^\circ ، ل \frac{2}{9} \text{ ل } ٤٥^\circ = (ل \frac{1}{4} ، ل \frac{1}{4})$$

$$، \text{ بالمثل : } س_٢ = (ل \frac{1}{4} ، ل \frac{1}{4}) ، س_٢ = (ل \frac{1}{4} ، ل \frac{1}{4})$$

$$، س_٢ = (ل \frac{1}{4} ، ل \frac{1}{4}) ، \text{ بفرض أن : كتلة الصفيحة } = ل ٤$$

$\therefore$  كتلة الصفيحة المثلثة و هي المكونة من طبقتين  $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،

كتلة الصفيحة المثلثة  $هـ$  و هي المكونة من طبقتين  $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،

، كتلة الصفيحة المربعة و  $ي$   $ع$   $= ل$  ، و مركزها  $م$  ،

أحمد الشنتوري



(٢) اوجد مركز ثقل التوزيع التالى :

و<sub>١</sub> = ٢٠ نيوتن و يؤثر فى ( ١ ، ٢ ) ،

و<sub>٢</sub> = ١٥ نيوتن و يؤثر فى ( ١ ، ٣ )

و<sub>٣</sub> = ٢٥ نيوتن و يؤثر فى ( ١ - ، ١ )

الحل

و <sub>١</sub>	و <sub>٢</sub>	و <sub>٣</sub>
٢٠	١٥	٢٥
٢	٣ -	١
١	١	١ -

$$\therefore \text{س.م} = \frac{1 \times 20 + 3 \times 10 - 2 \times 20}{20 + 10 + 20} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ص.م} = \frac{1 \times 20 - 1 \times 10 + 1 \times 20}{20 + 10 + 20} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$  احداثى مركز الثقل =  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

احداثى مركز الثقل =  $(\frac{4.7}{7.7}, \frac{1.0}{7.7})$

### الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) معامل الاحتكاك يتوقف على ....

(ب) مساحة سطح التلامس بين الجسمين

(د) طبيعة الجسمي

(ع) كل ما سبق

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

ب ( ٦ ، ١٢ ، ٨ ) ،

د ( ٠ ، ١٢ ، ٨ ) ،

$\therefore \vec{PB} = (6, 12, 8) - (0, 12, 8) = (6, 0, 0)$

$(6, 0, 0)$

$(0, 12, 0) =$

$\therefore \|\vec{PB}\| = 12$

$\vec{u} = \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = \frac{(6, 0, 0)}{12} = (\frac{1}{2}, 0, 0)$

$$(0, 10, 0) = \left( \frac{(0, 12, 0)}{12} \right) \times 10 =$$

$$(6 - 0, 0, 8) = (6, 12, 0) - (0, 12, 8) = \vec{CD}$$

$\therefore \|\vec{CD}\| = 10$

$\vec{u} = \frac{\vec{CD}}{\|\vec{CD}\|} = \frac{(6, 12, 0)}{10} = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0)$

$$(18 - 0, 0, 24) = \left( \frac{(6 - 0, 0, 8)}{10} \right) \times 30 =$$

$$\therefore \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 6 & 12 & 0 \\ 18 & 0 & 24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ 6 & 0 & 8 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 9.0 - 3.6 - 12.0 + 16.8 - 14.4 - 28.8 =$$

$$= 3.6 - 14.4 - 16.8 - 28.8 =$$

طبيعة الجسمين

$$(ب) \quad \vec{P} \times \vec{r}_E - \vec{P} \times \vec{r}_S \quad (د) \quad \vec{P} \times \vec{r}_S + \vec{P} \times \vec{r}_E$$

$$(ب) \quad \vec{P} \times \vec{r}_E + \vec{P} \times \vec{r}_S \quad (د) \quad \vec{P} \times \vec{r}_S + \vec{P} \times \vec{r}_E$$

الحل

$$\vec{P} \times \vec{r}_E + \vec{P} \times \vec{r}_S$$

١٠ نيوتن

(٤) عزم الازدواج المقابل يساوى ....

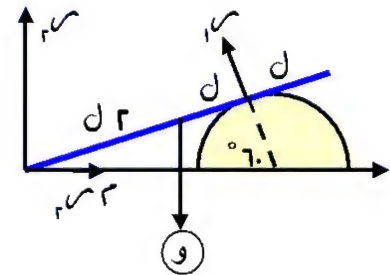
$$(ب) \quad ٨٠ \text{ نيوتن.سم} \quad (د) \quad ٨٠٠ \text{ نيوتن.سم}$$

$$(ب) \quad ٨٠ \text{ نيوتن.سم} \quad (د) \quad ٨٠٠ \text{ نيوتن.سم}$$

١٠ نيوتن

الحل

$$ع = ٨٠ \times ١٠ = ٨٠٠ \text{ نيوتن.سم}$$



(٥) فى الشكل المقابل :

إذا كان القضيب على وشك

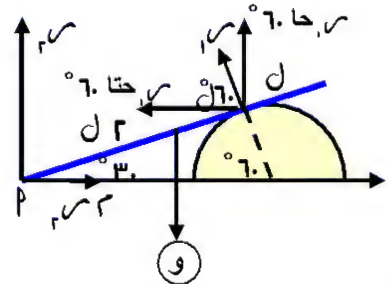
الانزلاق فإن :

$$\vec{r}_1 = \dots , \vec{r}_2 = \dots$$

$$(ب) \quad \frac{1}{3} \text{ و} \quad (د) \quad \frac{2}{3}$$

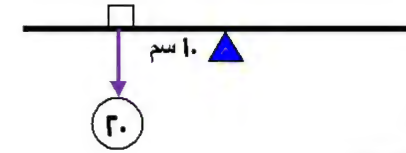
$$(ب) \quad \frac{1}{3} \text{ و} \quad (د) \quad \frac{2}{3}$$

الحل



$$(١) \quad \vec{r}_1 = \dots , \vec{r}_2 = \dots$$

$$(٢) \quad \vec{r}_1 = \dots , \vec{r}_2 = \dots$$



(٢) الشكل المقابل يمثل قضيب منتظم

يرتكز على حامل عند منتصفه

وضع عليه جسم كما بالشكل

أى من القوى الآتية تحدث توازن القضيب

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين

منتصف القضيب

(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٢٠ سم على يمين

منتصف القضيب

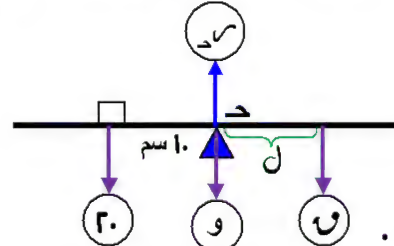
(د) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بعد ٥ سم على يسار

منتصف القضيب

(د) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بعد ٥ سم على يسار

منتصف القضيب

الحل



نفرض أن : قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل

تؤثر على على بعد ١٠ سم على يمين منتصف

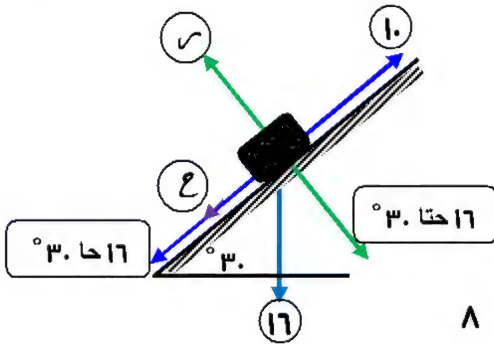
القضيب ، ∴ القضيب متزن

$$\therefore \vec{r}_1 = \dots , \vec{r}_2 = \dots$$

$$\therefore \vec{r}_1 = \dots , \vec{r}_2 = \dots$$

و تؤثر لأسفل على بعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب

(٣) أثرت قوة  $\vec{Q}$  =  $\vec{P} \times \vec{r}_E + \vec{P} \times \vec{r}_S$  فى نقطة Pمتجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو  $\vec{r}_E - \vec{r}_S$ فإن مركبة عزم  $\vec{Q}$  حول محورها هى .....



$$1. = 16 \text{ ح. } 30^\circ + \mathcal{E}$$

$$\therefore 16 \times \frac{1}{2} + \mathcal{E} = 1.$$

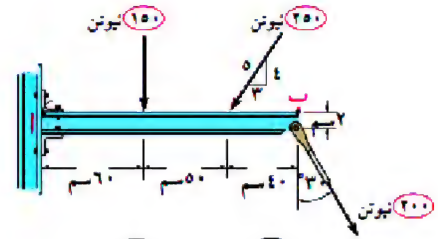
ومنها :  $\mathcal{E} = 2$

$$\mathcal{E} = 16 \text{ ح. } 30^\circ = 8$$

$$\therefore 8 = \frac{16}{2} \times \frac{1}{2} = 8$$

$$\therefore 8 = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$\therefore 8 < 4$  : الجسم متزن و ليس على وشك الحركة



(٢) فى الشكل المقابل :

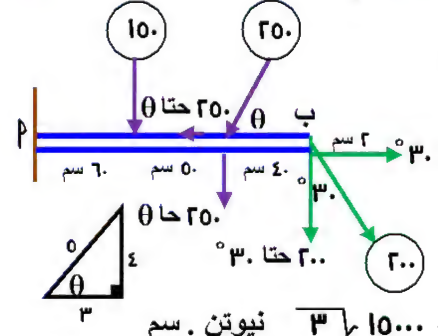
ثلاث قوى مستوية تؤثر فى

القضيب P ب اوجد القياسات

الجبرية لمجموع عزوم القوى

بالنسبة لكل من النقطتين P ، ب

الحل



$$\mathcal{E}_P = 100 \times 6 - 200 \times 4 = 200$$

$$- 200 \times 3 + 100 \times 2 = 200$$

$$+ 200 \times 3 - 100 \times 2 = 200$$

$$= 110 \times \frac{4}{5} \times 200 - 900 = 200$$

$$- 100 \times \frac{3}{4} \times 200 = 200$$

$$+ 200 \times \frac{1}{4} \times 200 = 200$$

$$\mathcal{E}_B = 200 \times 3 + 100 \times 2 - 200 \times 4 = 200$$

$$= 200 \times \frac{1}{4} \times 200 + 100 \times \frac{4}{5} \times 200 - 900 = 200$$

$$= 21700 \text{ نيوتن . سم}$$

$$\mathcal{E}_P = 0$$

$$\therefore 100 \times 6 - 200 \times 4 + 100 \times 2 = 0$$

$$\text{ومنها : } 100 \times 6 - 200 \times 4 + 100 \times 2 = 0$$

بالتعويض فى (١) ينتج :  $\mathcal{E}_P = 0$



(٦) مركز ثقل الصفيحة المظللة فى الشكل

المقابل هو ....

(٦) (٤ ، ٣) (ب) (٣ ، ٤)

(د) (٨ ، ٦) (٤) (٦ ، ٨)

الحل

من الشكل تكون احداثيات رؤوس الصفيحة هى :

(٠ ، ٠) ، (٠ ، ٩) ، (١٢ ، ٠) : الصفيحة مثلثة الشكل

: مركز ثقل الصفيحة يقع عند نقطة تلاقى المتوسطات

$$\therefore \text{احداثى مركز الثقل} = \left( \frac{0 + 0 + 12}{3}, \frac{0 + 9 + 0}{3} \right) = (4, 3)$$

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :

السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ١٦ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية

قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين الجسم يساوى  $\frac{1}{3}$

اثرث على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى

مقدارها ١٠ ث كجم فإذا كان الجسم متزناً عين قوة الاحتكاك و بين

ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أو لا ؟

الحل

: معادلات اتزان هى :

: القضيب متزن



## السؤال الثالث :

(١) قضيب منتظم طوله ٤ متر يرتكز على نقطة ارتكاز عند منتصفه علق ثقلان ٤ ، ٣ ث كجم فى احدى نصفيه و على بعد ١ ، ١,٥ متر من منتصفه على الترتيب و علق ثقلان ٥ ، ٢ ث كجم فى النصف الآخر و على بعد ١ ، ٢ متر من منتصفه على الترتيب فإذا اتزن القضيب اوجد قيمة و

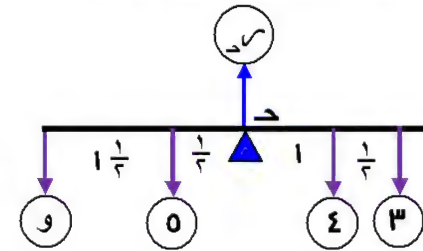
الحل

∴ القضيب متزن

$$\therefore \sum \tau = 0$$

$$\therefore \frac{1}{6} \times 5 - 1 \times 4 + \frac{2}{3} \times 3$$

$$- \text{و } 0 \times \dots = 0 \text{ ومنها : و } = 3 \text{ ث كجم}$$



(٢) ب ح صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣٠ سم ، و وزنها ٥٠ ث كجم علق الصفيحة من

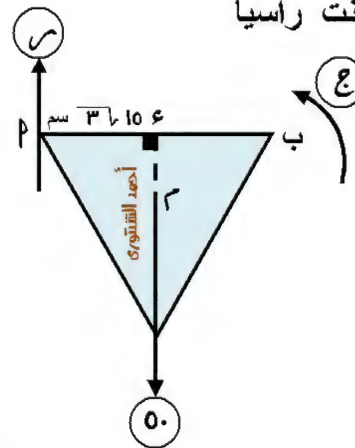
مسمار أفقى من بالقرب من الرأس م فاتزنت رأسياً اثر على الصفيحة ازدواج عمودى على مستوى الصفيحة فاتزنت الصفيحة فى وضع يكون فيه ب أفقياً اوجد عزم الازدواج المؤثر و رد الفعل على المسمار

الحل

∴ الصفيحة متزنة تحت تأثير ج ، ر ، ٥٠

∴ القوتان ( ر ، ٥٠ ) تكونان ازدواجاً

، ∴ ( ٥٠ ) يؤثر رأسياً لأسفل



∴ ر = ٥٠ ث كجم و يؤثر رأسياً لأعلى

$$ج = ٥٠ \times ٤ = ٢٠٠ = ١٥ \times ٣ = ٧٥٠ \text{ ث كجم . سم}$$

## السؤال الرابع :

(١) ب قضيب منتظم طرفه م مثبت فى مفصل فى حائط رأسى و طرفه الآخر ب مربوط بأحد طرفى خيط ، و ربط الطرف الآخر للخيط فى نقطة فى المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث يميل كل من القضيب و الخيط على الأفقى بنفس الزاوية θ فإذا كان ( و ) وزن القضيب ، بين أن رد فعل المفصل عند م يساوى

$$\frac{1}{2} \text{ و } \sqrt{8 + 4\theta^2}$$

الحل

نفرض أن :

طول القضيب = ل وحدة طول

، مقدار مركبتى رد فعل

المفصل عند م هما :

س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>

من هندسة الشكل :

$$٤٢ = ٢٢ \text{ ب ح } = ٢٢ \text{ ح ا } = ٢٢ \text{ ل ح ا } \text{ ح ا } = \theta$$

$$\therefore ٤٢ = ٢٢ \text{ ح ا } = ٢٢ \text{ ل ح ا } \text{ ح ا } = \theta$$

$$٢٢ \text{ ل ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta$$

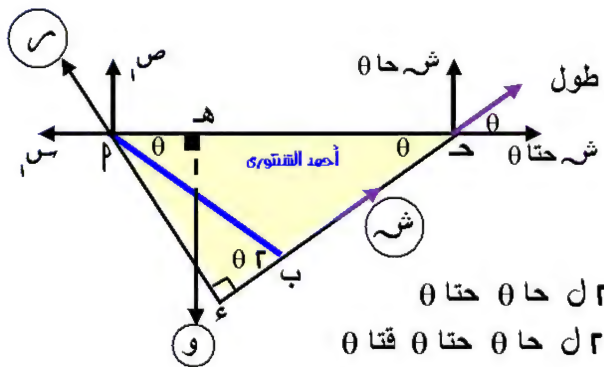
∴ معادلات الاتزان هى :

$$(١) \text{ س } = \text{ ش ح ا } = \theta$$

$$(٢) \text{ ص } = \text{ و } - \text{ ش ح ا } = \theta$$

$$ج = ٥٠ \text{ ، } \therefore \text{ ش ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta$$

$$\therefore \text{ ش ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta \text{ ح ا } = \theta$$



ثانياً : عند رفع الكتلة عند الرأس ح يكون :



عند م	عند ب	عند ع	
١	٢	١	الكتلة
٠	٢٠	٠	س
٢٠	٠	٠	ص

$$س_م = \frac{٠ \times ١ + ٢٠ \times ١ + ٠ \times ١}{١٣} = \frac{٢٠}{١٣}$$

$$ص_م = \frac{٢٠ \times ١ + ٠ \times ١ + ٠ \times ١}{٤} = \frac{٢٠}{٤}$$

∴ إحداثى مركز الثقل =  $(\frac{٢٠}{١٣}, \frac{٢٠}{٤})$  بالنسبة لنقطة م

حل آخر لثانياً :

مركز ثقل المجموعة المكونة من ٤ كتل عند كل رأس من رؤوس المربع يؤثر عند مركز المربع ( نقطة تقاطع القطرين ) و كتلته = ٤ ل حيث إحداثيات المركز ( ١٠ ، ١٠ )

و الكتلة التى رفعت من الرأس ح = ( ٢٠ ، ٢٠ ) = ل - ل ( اكمل بنفسك )

السؤال الخامس :

( ١ ) م ب د صفیحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م

مركز ثقلها وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ٢ كجم عند الرؤوس

م ، ب ، د على الترتیب برهن أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م د

الحل

نفرض أن : طول ضلع الصفیحة = ل  
من هندسة الشكل :

و منها : ش =  $\frac{١}{٤}$  و قتا  $\theta$  ، بالتعويض فى ( ١ ) ، ( ٢ ) ينتج :

س<sub>١</sub> =  $\frac{١}{٤}$  و طتا  $\theta$  ، ص<sub>١</sub> =  $\frac{٣}{٤}$  و

$$\therefore (س_١) + (ص_١) = (س_٢) \Rightarrow \frac{١}{١٦} + \theta \text{ طتا} = \frac{٩}{١٦}$$

$$\frac{١}{١٦} + \theta \text{ طتا} = \frac{٩}{١٦} \Rightarrow \theta \text{ طتا} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{١٦} + \theta \text{ قتا} = \frac{١}{١٦} \Rightarrow \theta \text{ قتا} = ٨ \sqrt{\theta}$$

( ٢ ) م ب د ع مربع طول ضلعه ٢٠ سم ، وضعت كتل متساوية المقدار

عند رؤوسه ، أولاً : عين مركز ثقل المجموعة

ثانياً : إذا رفعت الكتلة الموجودة عند أحد رؤوسه

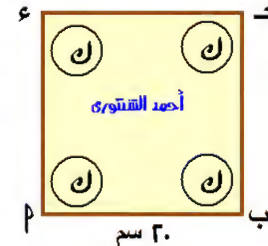
فأين يقع مركز المجموعة المتبقية

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين م ب ، م ع

وبفرض أن كل كتلة عند كل رأس = ل فيكون :

م ( ٠ ، ٠ ) ، ب ( ٠ ، ٢٠ ) ، د ( ٢٠ ، ٢٠ ) ، ع ( ٢٠ ، ٠ )



عند م	عند ب	عند د	عند ع	
١	٢	٢	١	الكتلة
٠	٢٠	٢٠	٠	س
٢٠	٢٠	٠	٠	ص

$$س_م = \frac{٠ \times ١ + ٢٠ \times ١ + ٢٠ \times ١ + ٠ \times ١}{١٠} = \frac{٤٠}{١٠} = ٤$$

$$ص_م = \frac{٢٠ \times ١ + ٢٠ \times ١ + ٠ \times ١ + ٠ \times ١}{٤} = \frac{٤٠}{٤} = ١٠$$

∴ إحداثى مركز الثقل = ( ١٠ ، ١٠ ) بالنسبة لنقطة م

من هندسة الشكل نجد أن :

$$P(1, 0, 0), B(6, 8, 0), \therefore \vec{PB} = (5, 8, 0)$$

$$- (5, 8, 0) = \vec{BP} = (-5, -8, 0)$$

$$(1, 0, 0)$$

$$(1, -8, 6) =$$

$$\therefore \|\vec{PB}\| = 10$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = \frac{(5, 8, 0)}{10}$$

$$(20, -20, 10) = \left( \frac{(1, -8, 6)}{10} \right) \times 20 =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{u} \\ 1 & 0 & 0 \\ 20 & -20 & 10 \end{vmatrix} = \vec{e} \times \vec{v} = \vec{w}$$

### الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن السؤال التالى :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

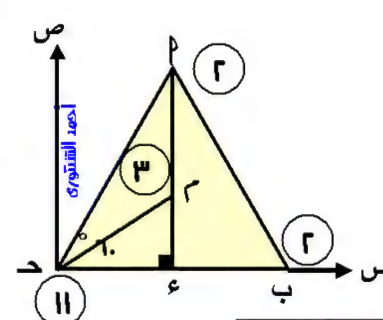
(١) معامل الاحتكاك السكونى هو النسبة بين ....

الحل

قوة الاحتكاك النهائى و رد الفعل العمودى

(٢) إذا اثرت القوة  $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{e}$  فى النقطة  $P$  متجه

موضعها  $\vec{r} = 3\vec{e}$  فإن عزم  $\vec{w}$  بالنسبة للنقطة  $B$  متجه



$$P = 10 \text{ N}, \text{ ح. } 60^\circ$$

$$P \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ N}$$

$$D = 10 \text{ N}$$

و بأخذ الاتجاهين المتعامدين  $\vec{D}_H$  ،  $\vec{D}_V$  ،  
فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :

عند ح	عند ب	عند P	عند م	
11	2	2	3	الكتلة
.	.	.	.	س
.	.	.	.	ص

$$\therefore S = \frac{10 \times \frac{1}{2} \times 3 + 10 \times \frac{1}{2} \times 2 + 10 \times 2 + 0 \times 11}{3 + 2 + 2 + 11} = 10 \text{ N}$$

$$V = \frac{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 + 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 + 0 \times 2 + 0 \times 11}{3 + 2 + 2 + 11} = 5\sqrt{3} \text{ N}$$

$$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \text{احداثى منتصف م ح}$$

$\therefore$  مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف م ح

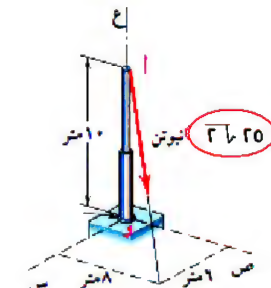
(٢) فى الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها 50 نيوتن

فى نقطة M

أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة و

الحل





(٦) يقع مركز ثقل الجسم الجاسئ المعلق تعليقا حراً على الخط المستقيم الرأسى المار بـ ....

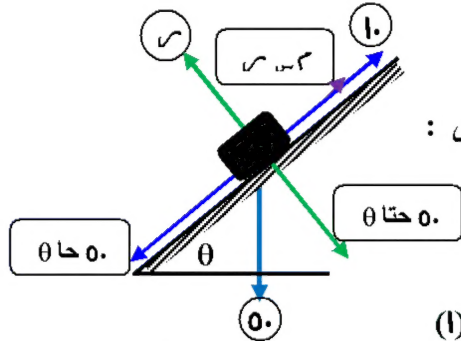
الحل

نقطة التعليق

ثانياً : أجب عن ثلاثة أسئلة فقط مما يلى :  
السؤال الثانى :

(١) وضع جسم وزنه ٥. نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها  $\theta$  ، فإذا كان أقل و أكبر قوة موازية لخط أكبر ميل و تجعل الجسم متزاناً على المستوى هما ١. ، ٤. نيوتن على الترتيب اوجد معامل الاحتكاك و قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

الحل



فى الحالة الأولى ( أقل قوة )  
القضيب يكون على وشك الحركة لأسفل  
∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

$$1.0 + 5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

$$5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

$$1.0 + 5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

$$1.0 - 5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta \quad (1)$$

فى الحالة الثانية ( أكبر قوة )  
القضيب يكون على وشك الحركة لأعلى  
∴ من الشكل المقابل معادلات الاتزان هى :

$$4.0 + 5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

$$5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

$$4.0 + 5.0 \sin \theta = 5.0 \cos \theta$$

بالتعويض من (١) ينتج :

موضعها  $\vec{r} + \vec{s} = \vec{t}$  يساوى ....

الحل

$$\vec{t} = \vec{r} + \vec{s} - \vec{t}$$

$$\vec{t} = \vec{r} + \vec{s} - \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{s} & \vec{t} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{r} \times \vec{t} = \vec{s}$$

(٣) قوتان متوازيتان متحدا الاتجاه مقدار احدهما ضعف مقدار الأخرى

و مقدار محصلتهما ٣٩ نيوتن فإن مقدار اصغرهما يساوى ....

الحل

بفرض أن : مقدار الصغرى =  $u$  ∴ مقدار القوة الكبرى =  $2u$

∴ القوتان متوازيتان متحدا الاتجاه

$$\therefore u + 2u = 39 \quad \therefore 3u = 39 \quad \therefore u = 13 \text{ نيوتن}$$

(٤) إذا كونت القوتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  ،  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$  ،  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{z}$  ،  $\vec{u} = \vec{b}$  ،  $\vec{v} = \vec{c}$

ازدواج فإن :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$  ....

الحل

$$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \therefore \vec{u} - \vec{v} = \vec{z}$$

$$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \therefore \vec{u} - \vec{v} = \vec{z}$$

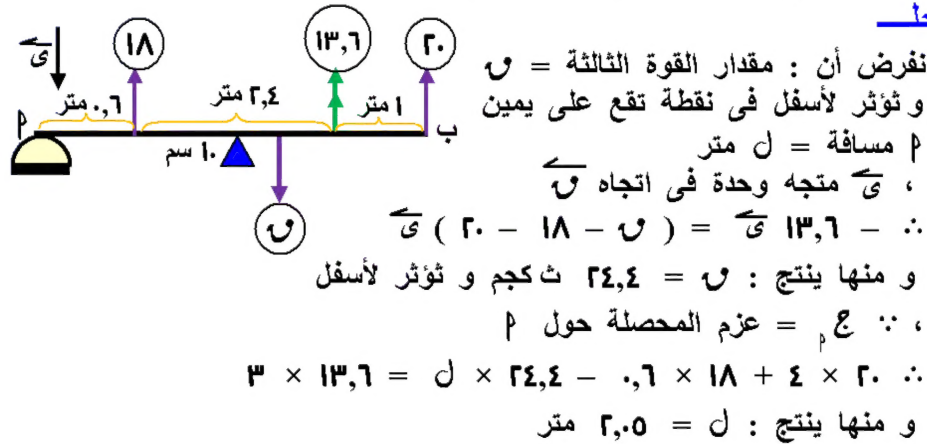
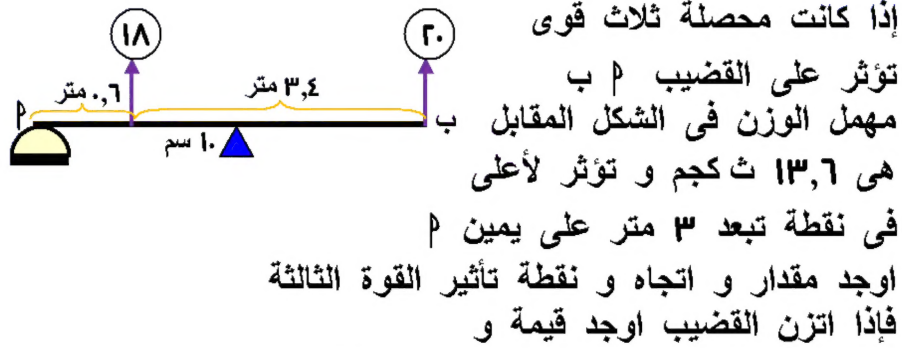
$$\therefore \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \quad \therefore \vec{u} - \vec{v} = \vec{z}$$

(٥) الشرط اللازم و الكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية هو ....

الحل

ينعدم متجه مجموع القوى ، ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة

## السؤال الثالث :



(٢)  $P$  ب د  $\epsilon$  مستطيل فيه  $P$  ب =  $١٢$  سم ، ب د =  $٩$  سم ،  $م \supseteq \overline{ب د}$  بحيث ب م =  $٤$  سم أثرت قوى مقاديرها  $١٠, ١٨, ٢٦, ٥$  نيوتن فى اتجاهات ب م ، م م ، م ع ، ع د ، د ب على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة أوجد قيمتى  $و١$  ،  $و٢$

الحل

$$٤٠ = ٥٠ \text{ حـا } \theta - ١٠ + ٥٠ \text{ حـا } \theta \text{ و منها ينتج :}$$

$$\therefore ٥٠ = ١٠٠ \text{ حـا } \theta \therefore \theta = ٥٠^\circ \therefore \frac{١}{٢} = \theta \therefore \theta = ٣٠^\circ$$

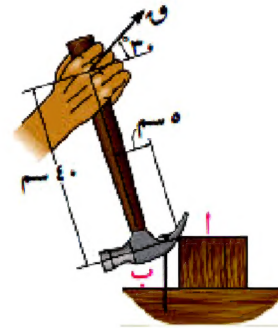
$$\therefore م = ٥٠ \text{ حـا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٥٠ = ٢٥\sqrt{٣} \text{ نيوتن ،}$$

$$٢٥\sqrt{٣} \times ٢٥ = ١٠ - \frac{١}{٢} \times ٥٠$$

$$\therefore ٢٥\sqrt{٣} \times ٢٥ = ١٥ \text{ و منها : } م = \frac{١}{٥}\sqrt{٣}$$

## (٢) الشكل المقابل :

يوضح القوة و اللازمة لنزع مسمار عند ب ، إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة  $P$  اللازمة لنزع المسمار يساوى  $٢٠٠$  نيوتن . سم اوجد معيار القوة  $و$



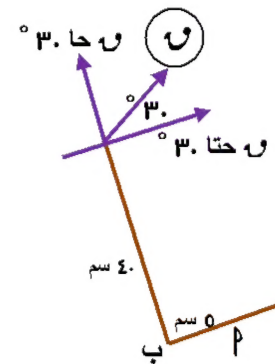
الحل

$$\therefore ج م = و \text{ حـا } ٣٠^\circ + ٤٠ \times و \text{ حـا } ٣٠^\circ$$

$$\therefore ٢٠٠ = و \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤٠ + و \times \frac{١}{٢}$$

$$\therefore و ( ٥ + ٢٠\sqrt{٣} ) = ٢٠٠$$

$$\text{و منها : } و = ٥,٤ \text{ نيوتن}$$



$$V,0 = \mathcal{E} \therefore V,0 = \mathcal{M}_P$$

$$\therefore \text{مقدار } \mathcal{E} \text{ عند ب} = \mathcal{M}_P = \frac{1}{4} \times 20 = 5$$

$\therefore \mathcal{E} < \mathcal{E}_P$  و بالتالي لا يمكن أن يتزن السلم في هذه الحالة بعد وضع الجسم الذي وزنه (و) عند ب بالنسبة للجسم :

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{5} = \mathcal{M}_P$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{M}_P$$

$$\therefore \mathcal{Z} = \frac{1}{5} = \mathcal{W}$$

بالنسبة للسلم :

$$\mathcal{M}_P = \frac{1}{4} \times \mathcal{M}_P + \frac{1}{5} \times \mathcal{W} \therefore 20 = \mathcal{M}_P \text{ و } \frac{1}{5} + 20 \times \frac{1}{4} = V,0$$

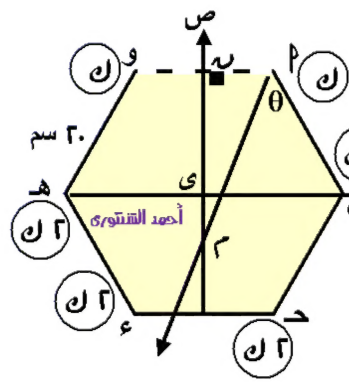
$$\mathcal{E}_P = \mathcal{E} \therefore \mathcal{E} = 2 \times \mathcal{M}_P - 1,0 \times 20 \therefore \mathcal{E}_P = \mathcal{M}_P \therefore V,0 = \mathcal{M}_P$$

$$\therefore V,0 = \mathcal{W} \text{ و منها : } 12,0 = \mathcal{W} \text{ ث كجم}$$

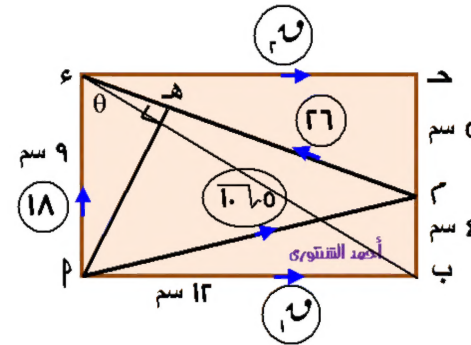
(٢) سلك منتظم طوله ١٠ سم ثني على هنية خمسة أضلاع من مسدس

منتظم ب د ه و بدأ من نقطة م ، عين بعد مركز ثقله عن مركز المسدس ، وإذا علق السلك تعليقاً حراً من طرفه م عين قياس زاوية ميل م ب على الرأسى في وضع التوازن

الحل



طول كل ضلع =  $20 = 10 \div 2$  سم  
بأخذ الاتجاهين المتعامدين  $Y \rightarrow M$  ،  $Y \rightarrow B$   
وبفرض أن كل كتلة عند كل ضلع = 2  
و تؤثر في منتصف كل منها  
و توزع عند كل رأس  
فتكون الكتل واحداً كما بالجدول التالي :



من هندسة الشكل : ب د = ١٣ سم  
 $\therefore$  مجموعة القوى متزنة

$$\mathcal{E}_P = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}_P = 9 \times 2 - 13 \times 18 = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}_P = 9 \times 2 - 13 \times 18 = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}_P = 9 \times 2 - 13 \times 18 = 0$$

و منها :  $\mathcal{E}_P = 24$  نيوتن

$$\mathcal{E}_P = 0 \therefore \mathcal{E}_P = 0 \times 2 - 12 \times 18 = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}_P = 0 \times 2 - 12 \times 18 = 0 \text{ و منها : } \mathcal{E}_P = 24 \text{ نيوتن}$$

السؤال الرابع :

(١) م ب سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث كجم يستند بطرفه

م على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة

معامل الاحتكاك بينهما  $\frac{1}{3}$  ، وكان الطرف ب على بعد ٣ متر

من الحائط ، اثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن في هذه الحالة

ثم اوجد اصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك بينه و بين الأرض

$\frac{1}{3}$  بحيث إذا وضع عند الطرف ب للسلم يمنعه من الانزلاق

الحل

من هندسة الشكل : م د = ٣ سم

بفرض أن السلم متزن :

$$\therefore \mathcal{E}_P = \mathcal{M}_P \text{ ، } \mathcal{E}_P = 20$$

$$\mathcal{E}_P = 0$$

$$\therefore \mathcal{E}_P = 2 \times \mathcal{M}_P - 1,0 \times 20 = 0$$



عند م	عند ب	عند د	عند هـ	عند و	الكتلة
١	٢	٢	٢	١	١
١٠ -	٢٠ -	١٠ -	١٠ -	١٠ -	١٠ -
٣٦١٠ -	٠	٣٦١٠ -	٣٦١٠ -	٣٦١٠ -	٣٦١٠ -

و من الجدول نجد :

$$س_م = \frac{١ \times ١ - ٢ \times ٢ - ١ \times ٢ - ١ \times ٢ + ٢ \times ٢ + ١ \times ١}{١٠} = ٠$$

$$ص_م = \frac{٣٦١٠ \times ١ - ٠ \times ٣٦١٠ - ٣٦١٠ \times ٢ - ٣٦١٠ \times ٢ - ٣٦١٠ \times ١}{١٠} = ٣٦٢ -$$

∴ احداثى مركز الثقل = ( ٣٦٢ - ، ٠ ) بالنسبة لنقطة و ( مركز المسدس )

∴ مركز المسدس و ( ٠ ، ٠ )

∴ مركز ثقل السك يبعد ٣٦٢ عن مركز المسدس عند التعليق من م

و يكون م هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق م

$$\frac{٣٦٢}{٠} = \frac{٣٦١٢}{١} = ( \angle م ب )$$

$$\angle م ب = ( \angle م ب ) = ١٨' ٦٤^\circ$$

∴ قياس زاوية رأس المسدس = ١٢٠°

$$\angle م ب = ( \theta ) = ١٨' ٦٤^\circ - ١٢٠^\circ = ٤٢' ٥٥^\circ$$

## السؤال الخامس :

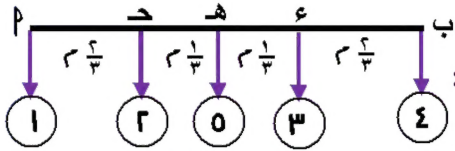
(١) م قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ٥ نيوتن ، د ، هـ ، ع نقطتى

تثليته من جهة م ، علق اوزان مقدارها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نيوتن

فى النقط م ، د ، هـ ، ب على الترتيب عين مركز ثقل المجموعة

الحل

بأخذ الاتجاهين المتعامدين م ب  
و العمودى عليه  
فيكون جدول الكتل و احداثياتها كما يلى :



عند م	عند د	عند هـ	عند ع	عند ب	الكتلة
١	٢	٥	٣	٤	١
٠	٢/٣	١	٣/٤	٢	٢

$$س_م = \frac{٢ \times ٤ + \frac{٤}{٣} \times ٣ + ١ \times ٥ + \frac{٢}{٣} \times ٢ + ٠ \times ١}{٤ + ٣ + ٥ + ٢ + ١} = \frac{١١}{٩}$$

∴ مركز ثقل المجموعة = ( ١١/٩ ، ٠ ) بالنسبة لنقطة م

(٢) قوتان ق<sub>١</sub> = س<sub>٢</sub> - ص<sub>٢</sub> ، ق<sub>٢</sub> = س<sub>١</sub> - ص<sub>١</sub> تؤثران فى

النقطتين م ( ١ ، ١ ) ، ب ( ٤ - ، ٠ ) على الترتيب

اوجد عزم المجموعة حول أى نقطة فى المستوى

الحل

$$\vec{ق_١} = ( ١ - ، ٢ ) = \vec{ق_٢} ، ( ١ - ، ٢ ) = \vec{ق_١} \therefore \vec{ق_١} - \vec{ق_٢} = \vec{ق_١} - \vec{ق_١} = \vec{0}$$

$$\vec{ق_١} \parallel \vec{ق_٢} \text{ و تضادها فى الاتجاه } ، \parallel \vec{ق_١} \parallel = \parallel \vec{ق_٢} \parallel$$

∴ المجموعة تكون ازدواج

$$\vec{ج} = \vec{و} \times \vec{م} + \vec{ق_١} \times \vec{ب} = \vec{ق_٢} \times \vec{م} + \vec{و} \times \vec{ب}$$

$$( ١ - ، ٢ ) \times ( ٤ - ، ٠ ) + ( ١ - ، ٢ ) \times ( ١ ، ١ ) =$$

$$= -٨\vec{ع} - ٣\vec{ع} = -١١\vec{ع}$$